ABN7271
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 07/18/88 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B46702
035/2: : |a (CaOTULAS)160036447
040: : |a MiU |c MiU
100:1 : |a Thomae, J. |q (Johannes), |d 1840-1921.
245:00: |a Grundriss einer analytische Geometrie der Ebene, |c von J. Thomae.
260: : |a Leipzig, |b B. G. Teubner, |c 1906.
300/1: : |a x, 183, [1] p. |b diagrs. |c 22 cm.
650/1: 0: |a Geometry, Analytic |x Plane
998: : |c WFA |s 9124

GRUNDRISS
EINER ANALYTISCHEN GEOMETRIE
DER EBENE

VON

J. THOMAE
IN JENA

MIT 8 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1906

Vorwort.

In meinen Vorlesungen über analytische Geometrie der Ebene habe ich seit vielen Jahren meinen Zuhörern ein Skelett zur Unterstützung in die Hand gegeben, daß die vorzutragenden Sätze enthielt und auch die Beweise dafür in Kürze gab. Auf Veranlassung von Freunden entschloß ich mich, da mein Vorrat an Exemplaren des Skeletts erschöpft war, dieses in etwas erweiterter Form der Öffentlichkeit zu übergeben, nicht in der Absicht, die Vorlesungen überflüssig zu machen, sondern den Studierenden die Möglichkeit zu geben, das Vorgetragene ohne das lästige, die Aufmerksamkeit störende, Nachschreiben sogleich fixiert vor sich zu haben, und etwa Unverstandenes leicht zu ergänzen.

Der Grundriß umfaßt die Geometrie in einer Geraden, in einem Punkte und in der Ebene. In der letzten haben die Kegelschnitte, die Kollineation und die Dualität eine ausführliche Diskussion erfahren. Bei dem jetzigen Stande des Unterrichts auf den Schulen darf man wohl annehmen, daß ein Teil der Eigenschaften der Kegelschnitte unter Zugrundelegung der Achsengleichungen den Studierenden bekannt ist, es wird deshalb, nachdem der Kreis eine ausgedehntere Berücksichtigung erfahren hat, sofort die Kegelschnittgleichung in der allgemeinen Form untersucht. Man wird sich über den Inhalt am schnellsten aus dem angehängten ausführlichen Sachregister unterrichten.

In einem Grundriß, der einen vielbearbeiteten Stoff zum Gegenstande der Darstellung hat, wird man Neues kaum erwarten. Doch glaube ich, daß auch davon einiges in dem Büchlein vorhanden ist. Aber die Hauptsache ist die systema-

tische Anordnung. Sie ist hier so durchgeführt, daß die wichtigsten elementaren Sätze der projektiven Geometrie, deren Erlernung nach der Meinung des Verfassers mit der der analytischen Hand in Hand zu gehen hat, auf analytischem Wege erwiesen werden, daß dabei aber die metrischen Beziehungen nicht vernachlässigt werden.

Während des Druckes meines Buches gelangte ich in den Besitz des im gleichen Verlage erschienenen ausgezeichneten Lehrbuches der analytischen Geometrie der Herren Heffter und Köhler. In diesem Buche geht ähnlich wie bei mir die eindimensionale Geometrie der zweidimensionalen vorauf. Diesen Gang verfolge ich wohl schon seit zwanzig Jahren in meinen Vorlesungen. Daß sich auch sonst manche Berührungspunkte zwischen dem Lehrbuche und dem Grundrisse vorfinden, erklärt sich naturgemäß aus der Identität des Stoffes, den beide Arbeiten behandeln. Aber ein fundamentaler Unterschied besteht zwischen dem Lehrbuch und dem Grundriß. Der letzte klassifiziert nicht bloß, sondern er konstruiert auch. Im Lehrbuch findet sich im Sachregister unter dem Stichwort „Konstruktion" nur der Hinweis auf eine, nämlich die des vierten harmonischen Elementes zu drei gegebenen, gerade die, die im Grundriß als aus den Elementen bekannt vorausgesetzt wird.

Möge der Grundriß seinen Zweck, den Studierenden das Studium und Verständnis der analytischen und auch der projektiven Geometrie zu erleichtern, erfüllen.

Jena, November 1905.

J. Thomae.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Die Einführung der Koordinaten in die Geometrie durch Cartesius (1637) bedeutete einen ungeheuren Fortschritt. Ohne diese Erfindung würde wahrscheinlich die Ausbildung der Infinitesimalrechnung viel langsamer erfolgt sein, als es tatsächlich der Fall gewesen ist. Durch sie gelang es nicht mehr bloß Längen-, Winkel-, Flächen- und Raumgrößen der Rechnung zu unterwerfen, was ja die Alten schon getan hatten, sondern nun geometrische Örter durch analytische Gleichungen darzustellen, die Eigenschaften von Kurven und Flächen aus einer analytischen Formel zu ziehen nach allgemeinen Methoden, welche weniger als die der Euklidischen Geometrie von genialen Einfällen abhängig sind und in komplizierten Verhältnissen nicht versagen, die den Alten unentwirrbar schienen. Eine analytische Formel ist, mit Möbius zu reden, wie ein lebendes Wesen, das auf vernünftig gestellte Fragen vernünftige Antworten gibt, dem der ihre Sprache verstehen gelernt hat. Diese der Koordinatengeometrie innewohnende Kraft wendete ihr bald die ausgezeichnetsten Köpfe zu, bis im vorigen Jahrhundert eine gewisse Reaktion eintrat. Die Arbeiten eines Poncelet, Steiner, v. Staudt und vieler anderer legten in der sogenannten synthetischen Geometrie neue Wege frei, die in vielen Fällen überraschend schön und schnell zum Ziele führten, mit Leichtigkeit Aufgaben lösten, die der analytischen Untersuchung Schwierigkeiten machten. Zudem, sagte man, ist es methodisch falsch in Untersuchungen ein Koordinatensystem zu mengen, das der Sache an sich fremd ist. Diese Reaktion ist der analytischen Geometrie äußerst nützlich geworden. Durch Einführung der

sogenannten trimetrischen Koordinaten durch Möbius, Hesse, Plücker und durch Einführung der sogenannten abgekürzten Methode befreite sich dieselbe erheblich von speziellen Koordinatensystemen, nicht so, daß sie sie gänzlich entbehren könnte, aber so daß dieselben gewissermaßen latent werden und daß sie den denkenden Geometer nicht mehr zu stören vermögen. Der Staketenzaun, wie Steiner die Koordinaten spöttisch genannt haben soll, besteht im Grunde aus nichts anderem, als den Strahlenbüscheln, deren sich die synthetische Methode bedient. Die analytische Geometrie hat die Schlußweisen der synthetischen aufzunehmen vermocht, und da sie über reiche Hilfsmittel verfügt, so daß fast jeder Fortschritt der reinen Analysis zugleich einen solchen in der Geometrie bedeutet, so dürfte sie an Fruchtbarkeit und Allgemeinheit wohl dauernd der synthetischen überlegen bleiben. Für algebraische Kurven hat Herr Kötter in seinen „Grundzügen einer reinen Geometrie“ (Berlin 1887) manche allgemeinen Eigenschaften auf rein projektivem Wege erwiesen, seine Untersuchungen sind jedoch keineswegs leicht verständlich und bestätigen eher die Überlegenheit der analytischen Geometrie, als daß sie sie brechen. Der Verfasser ist selbst freilich ein Verehrer der rein projektiven Geometrie, die ohne Größenbetrachtungen auskommt, weil es vom ästhetischen Gesichtspunkte aus als eine Forderung erscheint, von Maßbeziehungen freie Sätze auch ohne solche zu erweisen, hält aber die Pflege der analytischen Methode, die uns hier beschäftigt, für gleich nötig. Einleitend schickt er eine kurze algebraische Betrachtung voraus über

---

Die bilineare Zuordnung und das Doppelverhältnis.

§ 1. Sind die Zahlen z den Zahlen ζ durck die bilineare Gleichung

$$a + b\zeta + cz + dz\zeta = 0$$

oder aufgelöst, durch die Substitution

$$z = -\frac{a + b\zeta}{c + d\zeta}, \quad \zeta = -\frac{a + cz}{b + dz}$$

zugeordnet, so nennt man diese Zuordnung eine kollineare, oder man sagt z und ζ stehen zueinander in kollinearer Verwandtschaft. Zu jeder Zahl z gehört eine Zahl ζ und umgekehrt. Die Beziehung ist ein-eindeutig.

Es gibt aber einen Ausnahmefall, die uneigentliche Kollineation, nämlich wenn $a : c = b : d$, oder, was dasselbe ist, wenn die Determinante der Substitution $ad - bc$ verschwindet. Alsdann entspricht jeder Zahl ζ nur eine einzige Zahl $z = -a : c$, der Zahl $\zeta = -c : d$ aber entspricht jede Zahl z. Umgekehrt entspricht jeder Zahl z nur eine einzige Zahl $\zeta = -a : b$, aber der Zahl $z = -b : d$ jede Zahl ζ. Die Beziehung ist in diesem Falle nicht mehr durchweg ein-eindeutig. Wir werden aber unter Kollineation im allgemeinen eine Verwandtschaft verstehen, deren Determinante nicht Null ist. Verschwindet die Determinante, so nennen wir die Kollineation eben eine uneigentliche. Die bilineare Gleichung nimmt in diesem Falle die Form an

$$d\left(z + \frac{b}{d}\right)\left(\zeta + \frac{c}{d}\right) = 0.$$

§ 2. Sind die Zahlen z den Zahlen z' kollinear zugeordnet, diese den Zahlen ζ, etwa durch die Beziehungen

$$z = -\frac{a' + b'z'}{c' + d'z'}, \quad z' = -\frac{a'' + b''\zeta}{c'' + d''\zeta},$$

so sind die Zahlen ζ den Zahlen z kollinear zugeordnet durch die Gleichung

$$z = -(a + b\zeta) : (c + d\zeta),$$

wo

$$a = a'c'' - b'a'', \quad b = a'd'' - b'b'', \quad c = c'c'' - d'a'',$$
$$d = c'd'' - d'b''$$

ist und die Beziehung statt hat

$$ad - bc = (a'd' - b'c')(a''d'' - b''c'').$$

Die Determinante der zusammengesetzten Substitution ist das Produkt der Determinanten der zusammensetzenden Substitutionen.

Es folgt daraus, daß man durch Zusammensetzung einer Reihe von Kollineationen zu einer Kollineation gelangt, die nur dann eine uneigentliche ist, wenn sich unter den zusammensetzenden Kollineationen eine uneigentliche befindet. — Man sagt, die linearen Substitutionen oder die Kollineationen bilden eine Gruppe.

Aus $(a + bz) : (c + dz) = (\alpha + \beta\zeta) : (\gamma + \delta\zeta)$ folgt

$$a\gamma - c\alpha + (b\gamma - d\alpha) z + (a\delta - c\beta)\zeta + (b\delta - d\beta) z\zeta = 0.$$

Diese Gleichung bedeutet also ebenfalls eine Kollineation.

§ 3. Jede kollineare Verwandtschaft läßt sich aus drei (im Grunde sogar schon aus zwei) besonders einfachen Kollineationen zusammensetzen. Diese sind

$$z = a + \zeta, \quad z = k\zeta, \quad z = 1 : \zeta.$$

Setzt man nämlich

$$z = -\frac{b}{d} + z', \quad z' = -\frac{ad - bc}{dd} z'', \quad z'' = \frac{1}{z'''}, \quad z''' = \frac{c}{d} + \zeta,$$

so folgt

$$z'' = \frac{d}{c + d\zeta}, \quad z' = -\frac{ad - bc}{d(c + d\zeta)},$$

$$z = -\frac{b}{d} - \frac{ad - bc}{d(c + d\zeta)} = -\frac{a + b\zeta}{c + d\zeta}.$$

§ 4. Ist die Kollineation symmetrisch, d. h. ist

$$b = c, \quad a + b(\zeta + z) + dz\zeta = 0,$$

$$z = -(a + b\zeta) : (b + d\zeta), \quad \zeta = -(a + bz) : (b + dz),$$

so sind die Zahlen z und ζ einander so zugeordnet, daß, wenn der Zahl $z = m$ die Zahl $\zeta = n$ entspricht, der Zahl $z = n$ die Zahl $\zeta = m$ zugeordnet ist. Man nennt dann die Kollineation involutorisch oder schlechthin eine Involution. Sieht eine Person z, sich im Punkt Null spiegelnd, ihr Bild in ζ, so würde z, wenn die Person an den Platz ζ ginge, nun ihr Bild an der ursprünglichen Stelle z sehen. Weil die Beziehung zwischen z und dem Spiegelbild ζ eine vertauschbare, eine symmetrische,

eine involutorische ist, so hat man für den Begriff Involution auch das Wort „Spiegelung" aufgebracht. Nur ist diese Spiegelung (Involution) von allgemeinerem Charakter als die eben beschriebene. Auch nennt man die Involution wohl eine „Paarung".

Die sich selbst entsprechenden Zahlen einer Kollineation ($z = \zeta$) sind Wurzeln der Gleichung $a + (b + c)\, z + dz^2 = 0$, die einer Involution sind die Wurzeln der Gleichung $a + 2bz + dz^2 = 0$, sie fallen zusammen, wenn $ad - b^2 = 0$ ist, oder wenn die Involution eine uneigentliche ist. Die sich selbst entsprechenden Stellen, die Doppelstellen, fallen in einer gewöhnlichen Kollineation zusammen, wenn $(b + c)^2 - 4ad = 0$ ist, die Verwandtschaft heißt dann eine parabolische.

Enthält eine Kollineation (außer den Doppelstellen) ein einziges vertauschbares, ein involutorisches Paar, so ist sie eine Involution. Denn ist zugleich für ein bestimmtes Paar $z\zeta$

$$a + b\zeta + cz + dz\zeta = 0, \quad a + bz + c\zeta + dz\zeta = 0,$$

so folgt durch Subtraktion

$$(b - c)\,(z - \zeta) = 0, \quad b = c.$$

Einfachste Involutionen sind

$$z = -\zeta, \quad z = 1 : \zeta, \quad z = -1 : \zeta.$$

In der ersten ist die eine Doppelstelle $z = \infty$, die andere $z = 0$, in der zweiten sind sie ± 1, in der dritten sind sie imaginär $z = \pm i$.

§ 5. Kollineare Zuordnung einer Zahlenreihe zu den Paaren einer Involution. Sind $z\zeta$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(A + \lambda A')\, z^2 + 2(B + \lambda B')\, z + C + \lambda C' = 0,$$

so ist

$$z + \zeta = -2\,\frac{B + \lambda B'}{A + \lambda A'}, \quad z\zeta = \frac{C + \lambda C'}{A + \lambda A'},$$

daraus folgt

$$2(AB' - A'B)\, z\zeta + (z + \zeta)\,(AC' - A'C) + 2\,(BC' - B'C) = 0.$$

Es findet also zwischen z und ζ eine bilineare symmetrische Gleichung statt, die Zahlen $z\zeta$ sind in Involution. Zu jedem λ gehört ein Paar derselben. Wir können sagen, die Zahlen λ seien den Paaren der durch die quadratische Gleichung bestimmten Involution kollinear zugeordnet. — Enthält eine zweite quadratische Gleichung den Parameter λ ebenfalls linear, so werden dadurch die Paare zweier Involutionen einander kollinear zugeordnet.

§ 6. Eine Kollineation ist durch drei Paare entsprechender Zahlen bestimmt. Die Kollineation enthält drei wesentliche Konstante, die Verhältnisse $a:b:c:d$; man kann sie so bestimmen, daß drei beliebigen von einander verschiedenen Zahlen $z_1 z_2 z_3$ drei beliebige von einander verschiedene Zahlen $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$ entsprechen. Durch diese Forderung sind die Konstantenverhältnisse völlig bestimmt.

Eine Involution ist durch zwei Paare bestimmt. Denn den Zahlen $z_1 \zeta_1 z_2$ entsprechen bezw. die Zahlen $\zeta_1 z_1 \zeta_2$ kollinear.

Die durch drei Paare bestimmte Kollineation stellen wir nachher durch das Doppelverhältnis dar.

§ 7. Das Doppelverhältnis und seine Invarianz. Nennen wir augenblicklich die drei einfachen Kollineationen, aus denen sich jede Kollineation zusammensetzen läßt,

$$z = a + \zeta, \quad z = k\zeta, \quad z = 1 : \zeta$$

die Kollineationen I II III, so ändert die Differenz zweier Zahlen ihre Form nicht bei der Kollineation I, d. h. es ist

$$z_2 - z_1 = \zeta_2 - \zeta_1.$$

Bei den Kollineationen II und III aber erhält man bezw. die Formen

$$z_2 - z_1 = k(\zeta_2 - \zeta_1), \quad z_2 - z_1 = (\zeta_1 - \zeta_2) : \zeta_1 \zeta_2.$$

Der Differenzenquotient

$$z_2 - z_1 : z_3 - z_2 = \zeta_2 - \zeta_1 : \zeta_3 - \zeta_2$$

bleibt ungeändert bei den Kollineationen I und II, während er bei der Kollineation III die Form gewinnt

$$z_2 - z_1 : z_3 - z_2 = (\zeta_2 - \zeta_1)\zeta_3 : (\zeta_3 - \zeta_1)\zeta_1.$$

Nimmt man aber eine vierte Zahl hinzu und bildet den Doppelquotienten

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_3 - z_4} = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_3 - \zeta_2} : \frac{\zeta_4 - \zeta_1}{\zeta_3 - \zeta_4} = (z_1, z_2, z_3, z_4),$$

so ändert derselbe seine Form nicht bei den drei Kollineationen I II III, und folglich bei jeder Kollineation, was übrigens auch leicht direkt erweisbar ist. Das Doppelverhältnis bleibt bei jeder Kollineation invariant.

§ 8. Bestimmung einer Kollineation durch drei Paare entsprechender Zahlen. Da das Doppelverhältnis von vier Paaren entsprechender Zahlen in einer Kollineation dasselbe ist, so folgt

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z - z_1}{z_3 - z} = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_3 - \zeta_2} : \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta_3 - \zeta},$$

$$(z_2 - z_1)(\zeta_3 - \zeta_2)(z_3 - z)(\zeta - \zeta_1)$$
$$- (\zeta_2 - \zeta_1)(z_3 - z_2)(z - z_1)(\zeta_3 - \zeta) = 0,$$

also eine bilineare Gleichung zwischen z und ζ, die die Kollineation bestimmt. Setzt man zur Abkürzung

$$z_2 - z_1 : z_3 - z_2 = m, \quad \zeta_2 - \zeta_1 : \zeta_3 - \zeta_2 = \mu,$$

so hat man

$$\mu z_1 \zeta_3 - m z_3 \zeta_1 + (m z_3 - \mu z_1)\zeta + (m\zeta_1 - \mu\zeta_3) z + (\mu - m) z\zeta = 0.$$

§ 9. Identitäten zwischen den 24 möglichen Doppelverhältnissen aus vier Zahlen. Sehr einfache Rechnung ergibt den Satz, daß ein Doppelverhältnis ungeändert bleibt, wenn man erst zwei seiner Elemente und dann die beiden anderen vertauscht. Oder in Zeichen

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_2, z_1, z_4, z_3) = (z_4, z_3, z_2, z_1) = (z_3, z_4, z_1, z_2).$$

Auch die folgenden Identitäten werden durch sehr einfache Rechnungen gefunden. Darin sind, um Platz zu sparen, die Zahlen $z_1 z_2 z_3 z_4$ nur durch ihre Indizes wiedergegeben.

$$(1\,2\,3\,4) = (2\,1\,4\,3) = (4\,3\,2\,1) = (3\,4\,1\,2)$$
$$= \frac{1}{(1\,4\,3\,2)} = \frac{1}{(4\,1\,2\,3)} = \frac{1}{(3\,2\,1\,4)} = \frac{1}{(2\,3\,4\,1)}$$
$$= 1 - (1\,3\,2\,4) = 1 - (3\,1\,4\,2) = 1 - (4\,2\,3\,1) = 1 - (2\,4\,1\,3)$$
$$= \frac{1}{1-(1\,3\,4\,2)} = \frac{1}{1-(3\,1\,2\,4)} = \frac{1}{1-(2\,4\,3\,1)} = \frac{1}{1-(4\,2\,1\,3)}$$
$$= 1 - \frac{1}{(1\,4\,2\,3)} = 1 - \frac{1}{(4\,1\,3\,2)} = 1 - \frac{1}{(3\,2\,4\,1)} = 1 - \frac{1}{(2\,3\,1\,4)}$$
$$= \frac{(1\,2\,4\,3)}{(1\,2\,4\,3)-1} = \frac{(2\,1\,3\,4)}{(2\,1\,3\,4)-1} = \frac{(3\,4\,2\,1)}{(3\,4\,2\,1)-1} = \frac{(4\,3\,1\,2)}{(4\,3\,1\,2)-1}.$$

Setzt man $(1\,2\,3\,4) = \lambda$, so ist

$$(1\,4\,3\,2) = 1 : \lambda, \quad (1\,3\,2\,4) = 1 - \lambda, \quad (1\,3\,4\,2) = 1 : (1 - \lambda)$$

Den vierundzwanzig möglichen Anordnungen der vier Elemente eines Doppelverhältnisses entsprechen also sechs Werte desselben, nämlich

$$\lambda, \ \frac{1}{\lambda}, \ 1 - \lambda, \ \frac{1}{1-\lambda}, \ \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \ \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Ist eins der möglichen Doppelverhältnisse reell, so sind sie alle reell. Dies findet z. B. statt, wenn die vier Zahlen $z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$, $z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$, $z_3 = \alpha_1 - \beta_1 i$, $z_4 = \alpha_2 - \beta_2 i$ aus zwei Paaren konjugiert imaginärer bestehen. Es ist nämlich

$$\frac{\alpha_2 + \beta_2 i - \alpha_1 - \beta_1 i}{\alpha_1 - \beta_1 i - \alpha_2 - \beta_2 i} : \frac{\alpha_2 - \beta_2 i - \alpha_1 - \beta_1 i}{\alpha_1 - \beta_1 i - \alpha_2 + \beta_2 i}$$
$$= \frac{\alpha_2 - \alpha_1 + i(\beta_2 - \beta_1)}{\alpha_1 - \alpha_2 - i(\beta_1 + \beta_2)} \cdot \frac{\alpha_2 - \alpha_1 - i(\beta_2 - \beta_1)}{\alpha_1 - \alpha_2 + i(\beta_1 + \beta_2)} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2}.$$

[§ **10**. Die absolute Invariante aus vier Zahlen. Gleichung für die sechs Doppelverhältnisse. Der Ausdruck

$$J = \frac{(1 - \lambda + \lambda^2)^3}{27\lambda^2(1-\lambda)^2} = \frac{(1 - \alpha\lambda)^3(1 - \alpha'\lambda)^3}{27\lambda^2(1-\lambda)^2},$$

in dem $\alpha = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\alpha' = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\alpha\alpha' = 1$ ist, bleibt unverändert, wenn man λ durch irgend eins der übrigen fünf Doppelverhältnisse ersetzt. Wir nennen ihn die absolute Invariante der vier Zahlen $z_1 z_2 z_3 z_4$. Die symmetrischen Funktionen der sechs Doppelverhältnisse lassen sich durch J ausdrücken. Daraus ergibt sich für die Doppelverhältnisse die Gleichung vom sechsten Grade

$$\lambda^6 - 3(\lambda^5 + \lambda) + (6 - 27J)(\lambda^4 + \lambda^2) - (7 - 54J)\lambda^3 + 1 = 0.$$

Von dem Inhalte dieses Paragraphen wird in den Elementen kein Gebrauch gemacht.]

§ 11. Ausgezeichnete Doppelverhältnisse. Die Werte 1, 0, ∞ kann ein Doppelverhältnis aus verschiedenen Zahlen nicht annehmen, wohl aber den Wert -1. Dann ist $\lambda = 1 : \lambda$, und das Doppelverhältnis ist nicht sechswertig, sondern nur dreiwertig

$$\lambda = \frac{1}{\lambda} = -1, \quad 1 - \lambda = 1 - \frac{1}{\lambda} = 2, \quad \frac{1}{1-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} = \frac{1}{2}.$$

Dieses Doppelverhältnis wird das harmonische genannt. Sind die Elemente $z_1 z_2 z_3 z_4$ reell und ist das Doppelverhältnis negativ, so sind die Zahlen $z_1 z_3$ von den Zahlen $z_2 z_4$ der Größe nach getrennt, (vergl. § 20). Diese Trennung spielt eine geometrische Rolle. Aus diesem Grunde versteht man unter dem harmonischen Doppelverhältnisse in der Regel nur das Doppelverhältnis -1. — Bleibt ein Doppelverhältnis von vier Zahlen ungeändert, wenn man darin nur zwei Elemente vertauscht, so gehört zu ihnen das harmonische.

Ist z. B. $(z_1 z_2 z_3 z_4) = (z_2 z_1 z_3 z_4)$, so folgt

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_3 - z_4} = -\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} : \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_4},$$

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3} : \frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_4} = (z_1 z_3 z_2 z_4) = -1.$$

Die vertauschten Elemente sind getrennte, man nennt sie zugeordnete oder konjugierte.

Ist $(z z_2 \zeta z_4)$ das harmonische Doppelverhältnis, so ist

$$\frac{z_2 - z}{\zeta - z_2} \cdot \frac{\zeta - z_4}{z_4 - z} = -1, \quad -2 z \zeta + (z + \zeta)(z_2 + z_4) - 2 z_2 z_4 = 0.$$

Die Zahlen $z \zeta$ sind in Involution, und $z_2 z_4$ sind die Doppelelemente.

Umgekehrt bilden die Paare einer Involution mit ihren Doppelelementen harmonische Doppelverhältnisse (vergl. § 19).

§ 12. Das äquianharmonische Doppelverhältnis. Dies ist ebenfalls ausgezeichnet, weil es nur zweiwertig ist. Es hat die komplexen Werte $\frac{1}{2} \pm i \frac{1}{2} \sqrt{3}$. Für diese Werte ist

$$\lambda = \frac{1}{1 - \lambda} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \quad \frac{1}{\lambda} = 1 - \lambda = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

$$\left(\tfrac{1}{2} + i \tfrac{1}{2} \sqrt{3}\right)\left(\tfrac{1}{2} - i \tfrac{1}{2} \sqrt{3}\right) = 1.$$

§ 13. Ersetzt man die Zahlen $z_1 z_2 z_3 z_4$ bezw. durch

$$\operatorname{tg} \zeta_1 \ \operatorname{tg} \zeta_2 \ \operatorname{tg} \zeta_3 \ \operatorname{tg} \zeta_4,$$

so ergibt sich

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_1 - z_4} = \frac{\sin(\zeta_2 - \zeta_1)}{\sin(\zeta_3 - \zeta_2)} : \frac{\sin(\zeta_4 - \zeta_1)}{\sin(\zeta_3 - \zeta_4)}.$$

Geometrie in einer Geraden und in einem Strahlenbüschel.

§ 14. Abszissen. Die Strecke von einem bestimmten, einem ausgezeichneten Punkte, auf einer Geraden *G* bis zu einem beliebigen anderen derselben Geraden heißt Abszisse. Durch diese Abszisse oder die Maßzahl derselben wird die Lage des zweiten Punktes bestimmt. Positiven Maßzahlen läßt man Abszissen entsprechen, die nach einer der beiden möglichen Richtungen auf der Geraden abgeschnitten werden, negativen die entgegengesetzten. Am meisten aber kommen von den Abszissen die Endpunkte in Betracht, deshalb kann man auch sagen, einer Zahl entspreche ein Punkt. So wird eine eindeutige Beziehung zunächst zwischen reellen positiven oder negativen Zahlen und Punkten einer Geraden hergestellt. Sinn und

Richtung unterscheiden wir so, daß letztere eine Beziehung einer Geraden zu anderen Geraden, ersterer eine Beziehung der Geraden auf sich selbst enthält. Eine Strecke kann auf einer Geraden in zweierlei Sinne gedacht werden, in Figuren wird der Sinn meistens durch Pfeile angedeutet. Die Strecke vom Punkte x_1 bis x_2 auf G wird der Größe und dem Sinne nach durch die Zahl $x_2 - x_1$ dargestellt, zur Bestimmung ihrer Lage gehört noch die Festlegung eines ihrer Punkte, z. B. des Anfangs- oder des Endpunktes, oder ihrer Mitte.

Daß man nach der Methode Euklids eine Gerade mit Zahlen so bedecken könne, daß jedem Punkte eine Zahl, jeder Zahl ein Punkt entspricht, ist ein Axiom.

Der auf G festgewählte Punkt heißt Anfangspunkt der Abszissen, seine eigene Abszisse ist Null. Die Abszissen in bezug auf einen festgewählten Punkt seien x, die derselben Punkte in bezug auf einen anderen Anfangspunkt, dessen Abszisse der positiven oder negativen Zahl a entspricht, seien x', so ist

$$x = a + x', \quad x' = x - a.$$

Man kann die Substitution $x = a + x'$ auch unter dem Gesichtspunkte der Verwandtschaft oder Abbildung auffassen. Man sieht x' als eine auf denselben Anfangspunkt wie x bezogene Abszisse an. Jeder Punkt x' entspricht dann einem Punkte x derart, daß x' um die Strecke a im negativen (oder wenn a negativ ist, im positiven) Sinne verschoben erscheint. Es ist die Verwandtschaft der Kongruenz. Jede Strecke $x_2 - x_1$ wird auf eine ihr kongruente $x_2' - x_1'$ abgebildet.

Setzt man $x' = kx$, so tut man im Grunde weiter nichts als daß man einen neuen Maßstab einführt. Während die Strecke $x_2 - x_1$ durch Verlegung des Anfangspunktes $x' = a + x$ oder durch Verschiebung ihren Wert nicht ändert, indem $x_2' - x_1' = x_2 - x_1$ ist, so bleibt dieselbe nicht invariant, wenn man einen neuen Maßstab einführt und, wenn k negativ ist, den Sinn der Abszissen umkehrt. Es bleibt aber der Verhältniswert zweier Strecken unverändert, sowohl wenn man eine Ver-

schiebung vornimmt, als auch wenn man einen neuen Maßstab einführt, es ist

$$x_2 - x_1 : x_4 - x_3 = x_2' - x_1' : x_4' - x_3'.$$

Die Gleichung $x = kx'$ kann aber auch als Verwandtschaft gedacht werden, die die durch denselben Maßstab bestimmten Punkte x, x' in Beziehung zueinander setzt, bei der die Abszissen und Strecken der Bildpunkte in gegebener Weise gegen die im Original vergrößert erscheinen. Man kann die Verwandtschaft als Ähnlichkeit mit dem Koordinatenanfang als Ähnlichkeitspunkt bezeichnen. Der Ähnlichkeitspunkt ist der im Endlichen liegende sich selbst entsprechende Punkt, der unendlich ferne Punkt entspricht ebenfalls sich selbst, wird aber nicht Ähnlichkeitspunkt genannt. Ist k negativ, so ist die Ähnlichkeit eine indirekte, die für $k = -1$ in die Spiegelung übergeht.

Die beiden Verwandtschaften lassen sich zusammensetzen. Die Gleichung $x = m + n\xi$ läßt sich herstellen, indem man $x = m + x'$, $x' = n\xi$ setzt. Die hierdurch bestimmte Verwandtschaft ist wieder die der Ähnlichkeit. Der Ähnlichkeitspunkt hat aber die Abszisse $x = m : (1 - n)$. Ist $n = 1$, so existiert kein Ähnlichkeitspunkt, die Verwandtschaft geht in die der Kongruenz über.

§ 15. Indirekte Bestimmung der Lage eines Punktes. Die Bestimmung der Abszisse und damit der Lage eines Punktes kann auch indirekt geschehen durch eine Zahl ξ, die die Abszisse eindeutig bestimmt. Es ist nicht nötig, daß die bestimmende Zahl ξ eine unmittelbare geometrische Bedeutung habe, doch ist die Auffindung einer solchen jedesmal erwünscht. Wird x durch die Gleichung gegeben

$$x = -(a + b\xi) : (c + d\xi), \quad ad - bc \neq 0,$$

so ist x und die Lage des zugehörigen Punktes durch ξ eindeutig bestimmt, wie auch ξ durch x völlig bestimmt ist. Es besteht zwischen x und ξ die bilineare Gleichung

$$a + b\xi + cx + dx\xi = 0.$$

Ein spezieller Fall dieser Bestimmungsweise ist es, wenn man $c = d = 1$, $a = -m$, $b = -n$ und $\xi = \nu : \mu$ setzt. Alsdann ist

$$x = (\mu m + \nu n) : (\mu + \nu),$$

und es ist x durch das Verhältnis von $\mu : \nu$ völlig bestimmt. Diese Bestimmung läßt die mechanische Deutung zu, daß x der Schwerpunkt der mit den Massen μ und ν belegten Punkten mn ist (baryzentrische Abszissen). Dabei muß man negative Massen zulassen, wenn man auch alle Punkte außerhalb der Strecke mn in dieser Form darstellen will. Der Punkt $x = \frac{1}{2}(m + n)$, der $\mu = \nu$ entspricht, ist die Mitte zwischen m und n.

In allen Fällen aber bedeutet die Bestimmung der Lage eines Punktes durch ξ ein Doppelverhältnis. Ist nämlich

$$dx\xi + cx + b\xi + a = 0,$$

und setzt man

$$x_2 = -\frac{a}{c}, \quad x_4 = -\frac{b}{d}, \quad x_3 = -\frac{a+b}{c+d},$$

$$\frac{x_2 - x_3}{x_3 - x_4} = \frac{bc - ad}{c(c+d)} : \frac{bc - ad}{d(c+d)} = \frac{d}{c},$$

so ist

$$\xi = -\frac{(a:c) + x}{(b:d) + x} : \frac{d}{c} = \frac{x_2 - x}{x - x_4} : \frac{x_2 - x_3}{x_3 - x_4} = (x\, x_2 x_3 x_4).$$

Es ist danach ξ das Doppelverhältnis von x mit drei festen Punkten $x_2 x_3 x_4$. Auch die Bestimmung durch x selbst kann als ein Doppelverhältnis von x zu drei ausgezeichneten Punkten aufgefaßt werden. Diese ausgezeichneten Punkte sind der Orientierungspunkt $x_2 = 0$, der Punkt $x_3 = 1$, der den Maßstab bestimmt, und der unendlich ferne Punkt $x_4 = \infty$. Läßt man x_4 ins Unendliche ablaufen, so erhält man

$$\xi = (x\, 0\, 1\, \infty) = \frac{0 - x}{0 - 1} : \frac{x - \infty}{1 - \infty} = x.$$

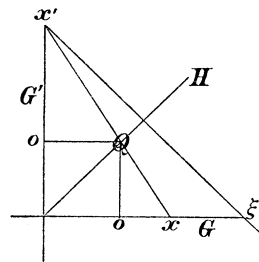
Es ist also x selbst das bestimmende Doppelverhältnis.

§ 16. Projektivität oder Kollineation. Denkt man sich x und ξ auf dasselbe Abszissensystem bezogen, so stellt die Gleichung $x = -(a + b\xi) : (c + d\xi)$, wenn $ad—bc$ nicht Null ist,

eine Beziehung, eine eineindeutige Abbildung oder Verwandtschaft zwischen verschiedenen Punkten her, die man Kollineation nennt. Projiziert man die Punktreihe x auf der Geraden G durch parallele Strahlen auf die Punkte x' der G parallelen Geraden G' und diese wieder durch parallele (zu GG' schräge) Strahlen nach den Punkten ξ auf G zurück, so kann man die Strahlen so einrichten, daß dem Punkt $x = a$ der Punkt $\xi = o$ entspricht, und daß also die Verwandtschaft entsteht $x = a + \xi$.

Errichtet man im Punkt $x = o$ auf G eine senkrechte H und projiziert die x von einem Punkt P auf H nach einer G parallelen Geraden G', und dann G' durch Strahlen die H parallel sind, nach den Punkten ξ auf G, so ist $x = k\xi$. Liegt P zwischen GG', so ist k negativ, liegt P in der Mitte zwischen GG', so erhält man die einfache Spiegelung $k = -1$.

Legt man durch den Punkt $x = -1$ auf G eine dazu senkrechte G' und bezeichnet auf ihr die Abzissen von einem Punkte ab, der vom Kreuzungspunkte die Entfernung Eins hat mit x', und projiziert nun von einem Punkte Q, der die dem Kreuzungspunkt gegenüberliegende Ecke eines Quadrates mit der Grundlinie Eins ist, die Punkte x und x', so ergibt der Satz vom Inhalt eines Dreieckes die Beziehung



$$\tfrac{1}{2}(1 + x)(1 + x') = 1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}x',$$

oder

$$xx' = 1.$$

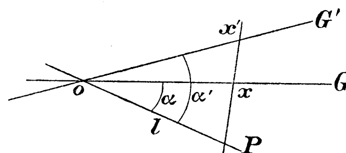
Projiziert man nun durch Strahlen die auf der den rechten Winkel (GG') halbierenden Geraden H senkrecht stehen die Punkte x' nach den Punkten ξ, so ist $x' = \xi$ und $x\xi = 1$, $x = 1 : \xi$.

Da sich jede lineare Substitution durch eine endliche Reihe sukzessiver Substitutionen der drei speziellen $x = a + \xi$, $x = k\xi$, $x = 1 : \xi$ ersetzen läßt (vgl. § 3), so erhält man den Satz:

Durch eine lineare Gleichung $x = -(a + b\xi) : (c + d\xi)$ wird eine Beziehung bestimmt, die geometrisch durch eine endliche Reihe von Projektionen, deren Anfangsglied und Endglied die

Reihen x und ξ bilden, hergestellt wird. Kollineare Verwandtschaft und projektive Verwandtschaft sind demnach identische Begriffe, die erste Bezeichnung hebt mehr die algebraische, die zweite die geometrische Seite derselben hervor. Die linearen Substitutionen bilden eine Gruppe, d. h. stehen x und x', x' und ξ in einer linearen Beziehung zueinander, so stehen auch x und ξ in linearer Beziehung, oder geometrisch zu reden, sind die x den x' projektiv zugeordnet, die x' den ξ, so sind auch die x und ξ einander projektiv zugeordnet. — Ist ein linearer Ausdruck in x gleich einem solchen in ξ, so erhält man durch Fortschaffung der Nenner einen bilinearen Ausdruck, der x linear in ξ, ξ linear in x ausdrückt (vgl. § 2).

§ 17. Die projektive Verwandtschaft ist eine kollineare. Aus der nebenstehenden Figur folgt, wenn man die Gerade G, auf der die Punkte x liegen, auf die Gerade G' mit den Punkten x' von einem Punkt P aus projiziert, wenn ferner die Linie oP mit G den Winkel α, mit G' den Winkel α' bildet, und $\varDelta$ den Inhalt eines Dreiecks, l die Länge von oP bezeichnet:



$$2\varDelta(oxP) = xl \sin\alpha, \quad 2\varDelta(ox'P) = x'l \sin\alpha',$$

$$2\varDelta(oxx') = -2\varDelta(oPx) + 2\varDelta(oPx') = -xl\sin\alpha + x'l\sin\alpha',$$

$$2\varDelta(oxx') = xx'\sin(\alpha' - \alpha) = -xl\sin\alpha + x'l\sin\alpha'.$$

Es besteht also zwischen xx' eine bilineare Gleichung: Perspektive Punktreihen sind kollinear. Projektive Punktreihen werden durch Wiederholung perspektiver Abbildung erhalten, sie sind mithin ebenfalls kollinear, entsprechende Punktquadrupel besitzen dasselbe Doppelverhältnis. Fällt P auf G, so liefert die Projektion eine uneigentliche Kollineation, dem Punkte P entsprechen alle Punkte x'. Perspektive Reihen können nicht auf derselben Geraden liegen, wohl aber projektive.

§ 18. In einer kollinearen Verwandtschaft auf derselben Geraden (kollokale Kollineationen), gibt es zwei und nur zwei sich selbst entsprechende Punkte, oder alle fallen zusammen. Sie werden aus der Gleichung $a + b\xi + cx + dx\xi = o$ gefunden, wenn $x = \xi$ gesetzt wird, woraus sich die beiden Werte für x ergeben:

$$\frac{-b-c+\sqrt{(b+c)^2-4ad}}{2d}, \quad \frac{-b-c-\sqrt{(b+c)^2-4ad}}{2d}.$$

Diese Werte sind reell, wenn $(b+c)^2 - 4ad > 0$ ist, die Verwandtschaft heißt hyperbolisch, sie sind imaginär, wenn

$$(b+c)^2 - 4ad < 0$$

ist, die Verwandtschaft heißt elliptisch, sie fallen in einen zusammen, wenn $(b+c)^2 - 4ad = 0$ ist, die Verwandtschaft heißt parabolisch. In der elliptischen Kollineation sind die Doppelpunkte unsichtbare, ideale. Da sie algebraisch ganz sicher bestimmt sind, so geben wir ihnen in der Geometrie dasselbe Bürgerrecht wie den sichtbaren.

Die Verwandtschaft, in der jeder Punkt ein Doppelpunkt ist, $a = 0$, $b = -c$, $d = 0$, heißt „Identität".

Durch drei Paare von entsprechenden Punkten ist eine Projektivität oder Kollineation vollständig bestimmt. Denn ist ($\barwedge$ bedeutet projektiv oder kollinear)

$$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \cdots \barwedge \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \xi_5 \cdots\cdot$$

und

$$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \cdots \barwedge \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi'_4 \xi'_5 \cdots,$$

so ist auch

$$\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \xi_5 \cdots \barwedge \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi'_4 \xi'_5 \cdots,$$

und da hier drei entsprechende Paare zusammenfallen, so fallen alle zusammen, es ist $\xi_4 \xi_5 \cdots = \xi'_4 \xi'_5 \cdots$ Das Doppelverhältnis aber gibt mit einem Schlage die Beziehung in der die drei Paare $x_1 \xi_1$, $x_2 \xi_2$, $x_3 \xi_3$ einander entsprechen, weil

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x - x_1}{x_3 - x} = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_3 - \xi_2} : \frac{\xi - \xi_1}{\xi_3 - \xi}$$

sein muß, dies ist aber eine lineare Beziehung zwischen x und ξ, also die gesuchte Verwandtschaftsgleichung (vgl. § 8).

Haben zwei projektive Punktreihen auf verschiedenen Trägern einen Punkt entsprechend gemein, so liegen sie perspektiv.

Die Verbindungslinien irgend zweier entsprechender Paare liefern durch ihren Schnittpunkt das Perspektivitätszentrum.

Zwei projektive gerade Punktreihen auf verschiedenen Trägern sind einer dritten Punktreihe gleichzeitig perspektiv. Dieser Satz liefert die Mittel zur geometrischen Konstruktion entsprechender Punkte zweier Punktreihen, von denen drei entsprechende Paare gegeben sind (vgl. meine Kegelschn. in projekt. Behandlung pag. 25, 26). Die rechnerische Bestimmung ist aber durch das Doppelverhältnis gegeben.

§ 19. Die Punktinvolution. Ist eine kollineare Verwandtschaft symmetrisch, so daß der Punkt x der ersten Reihe dem Punkte ξ der zweiten Reihe entspricht, und dem Punkte ξ als Punkte der ersten Reihe der Punkt x als Punkt der zweiten Reihe entspricht, so heißt die Verwandtschaft eine Involution. Die Beziehungen $x = -\xi$, oder $x = 1 : \xi$ sind die einfachsten involutorischen Beziehungen. Die Beziehung

$$a + b\xi + cx + dx\xi = 0$$

ist dann symmetrisch, wenn $b = c$ ist, sie bestimmt die Involution. Die sich selbst entsprechenden, die Doppelpunkte der Involution haben die Abszissen:

$$p = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ad}}{d}, \quad q = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ad}}{d},$$

die Involution ist eine hyperbolische, ihre Doppelpunkte sind reell, wenn $b^2 - ad > 0$ ist, sie ist eine elliptische, ihre Doppelpunkte sind imaginär, wenn $b^2 - ad < 0$ ist, sie fallen zusammen, die Involution wird eine uneigentliche, wenn $b^2 - ad = 0$ ist. Daß auch diese nicht von der Betrachtung ausgeschlossen werden dürfen, ergibt sich in der Lehre von den Kegelschnitten. Die Involutionsgleichung kann geschrieben werden

$$pq - \tfrac{1}{2}(p + q)(x + \xi) + x\xi = 0, \quad d \neq 0.$$

Ist $x\xi$ ein Paar der Involution, und bildet man aus ihnen und den Doppelpunkten das Doppelverhältnis:

$$\frac{p-x}{\xi-p}:\frac{q-x}{\xi-q}=\frac{p-x}{\xi-p}\cdot\frac{\xi-q}{q-x}=\frac{-pq+\xi p+xq-x\xi}{-pq+px+q\xi-x\xi},$$

und addiert man im Zähler und Nenner den verschwindenden Ausdruck

$$x\xi-\tfrac{1}{2}(p+q)(x+\xi)+pq,$$

so folgt

$$(x,p,\xi,q)=\frac{\xi(p-q)+x(q-p)}{x(p-q)+\xi(q-p)}=-1.$$

Das heißt, die Paare einer Involution sind durch ihre Doppelpunkte harmonisch getrennt. Diese Redeweise ist allerdings eine uneigentliche, wenn die Doppelpunkte imaginär sind. Ist d nicht Null, so kann man die Bestimmungsgleichung der Involution in die Form setzen:

$$\left(x+\frac{b}{d}\right)\left(\xi+\frac{b}{d}\right)=\frac{bb-ad}{dd}.$$

Da nun $-b:d$ die Mitte zwischen den Doppelpunkten (gleich $\frac{1}{2}(p+q)$) ist, so folgt daraus der Satz:

Das Produkt der Entfernungen zweier ein Paar bildender Punkte von der Mitte der Involution ist konstant. Die Mitte nnd der unendlich ferne Punkt sind ein Paar. — Ist $d=0$, so hat die Involution keinen Mittelpunkt, aber alle Paare haben dann dieselbe Mitte, die ein Doppelpunkt ist.

§ 20. Bemerkung über getrennte Elemente eines Doppelverhältnisses. Der Ausdruck $x_2-x_1:x_3-x_2$ ist positiv oder negativ, je nachdem x_2 zwischen oder außerhalb x_1x_3 liegt. Daraus schließt man leicht, daß, wenn $x_1x_2x_3x_4$ (bei reellen x) negativ ist, die Punkte x_2x_4 durch x_1x_3 getrennt sind, im andern Falle nicht getrennt sind, d. h. (im letzten Falle) führt man x_2 nach x_4 kontinuierlich, so braucht man dabei über keinen der beiden Punkte x_1x_3 hinwegzugleiten. Diese Überführung muß, wenn $x_2<x_1<x_3<x_4$ ist, durch das Unendliche hindurch erfolgen.

Sind $x_1\xi_1, x_2\xi_2$ zwei Paare der Involution $a+b(x+\xi)+dx\xi=0$, so ist das Doppelverhältnis:

$$(x_1x_2\xi_1\xi_2)=(x_2-x_1)(\xi_1-\xi_2):(\xi_1-x_2)(\xi_2-x_1)$$
$$=(x_2-x_1)\left(\frac{a+bx_2}{b+dx_2}-\frac{a+bx_1}{b+dx_1}\right):\left(\frac{a+bx_1}{b+dx_1}+x_2\right)\left(\frac{a+bx_2}{b+dx_2}+x_1\right)$$
$$=(b^2-ad)(x_2-x_1)^2:(a+b(x_1+x_2)+dx_1x_2)^2.$$

Das Doppelverhältnis ist negativ, wenn $b^2 - ad$ negativ ist, es gibt dann keine reellen Doppelpunkte, jedes Paar der Involution ist durch jedes andere Paar getrennt. Ist $b^2 - ad$ positiv, so ist kein Paar durch irgend ein anderes getrennt. Ist in einer Involution irgend ein Paar durch irgend ein anderes getrennt, so findet dies für alle Paare statt, die Involution ist eine elliptische.

§ 21. Sind die Punkte $x\xi$ durch zwei feste Punkte pq harmonisch getrennt, so sind $x\xi$ Paare einer Involution, deren Doppelpunkte pq sind. Denn die Gleichung

$$\frac{p-x}{\xi-p}:\frac{q-x}{\xi-q}=-1, \quad \frac{p-x}{q-x}+\frac{p-\xi}{q-\xi}=0$$

gibt zwischen $x\xi$ eine symmetrische bilineare Relation.

Ist

$$(A+\lambda A')x^2+2(B+\lambda B')x+C+\lambda C'=0,$$

so sind die Wurzeln dieser Gleichung nach § 5 Paare einer Involution.

Werden zwei Punktpaare als Wurzeln der beiden Gleichungen bestimmt

$$A+2Bx+Cx^2=0, \quad A'+2B'x+C'x^2=0,$$

so sind dieselben harmonisch durcheinander getrennt, wenn

$$AC'+A'C-2BB'=0$$

ist. Die linke Seite wird eine simultane Invariante der beiden Gleichungen genannt. — Man kann der Bedingung für vier harmonische Punkte die Form geben:

$$(x_1+x_3)(x_2+x_4)=2x_1x_3+2x_2x_4,$$

daraus folgt die eben als simultane Invariante bezeichnete Gleichung. Diese Bedingung vereinfacht sich für den häufig vorkommenden Fall, daß $x_4=0$ ist, sie wird dann:

$$(x_1+x_3)x_2=2x_1x_3.$$

Beide Ausdrücke sind reell, wenn x_1x_3 konjugiert imaginär sind. — Sind $f(x)$, $g(x)$ vom n^{ten} Grade, so definiert $f+\lambda g=o$ eine

Involution n^{ter} Ordnung. Ehe ich mich der Geometrie der Strahlen durch einen Punkt zuwende, die kürzer abgetan werden wird, will ich noch eine Bemerkung anknüpfen. Die Zeichner sind imstande, räumliche Gebilde, Landschaften, Körper in einer Ebene deutlich darzustellen. Hesse hat im 66. Bande des Crelleschen Journals (Ein Übertragungsprinzip) gezeigt, daß man die ganze ebene Geometrie gewissermaßen auf einer Geraden abbilden kann, so daß allen Vorgängen in der Ebene Vorgänge auf der Geraden und umgekehrt entsprechen. Die Involutionen spielen dabei eine wesentliche Rolle.

§ 22. Gerade Linien durch einen Punkt. Nimmt man zur Orientierung unter den Geraden oder Strahlen durch einen Punkt einen als fest gegeben an und nennt die trigonometrische Tangente des Winkels ξ, den ein beliebiger Strahl mit dem festen, dem Anfangsstrahl, macht X und ordnet auch zugleich den Strahl selbst der Zahl X zu, so entspricht jedem (reellen) Strahle eine reelle (positive oder negative) Zahl X und umgekehrt. Die Winkel zählt man in der Regel als positiv, wenn sie durch eine der Umdrehung des Uhrzeigers entgegengesetzte Drehung hervorgebracht sind, im andern Falle negativ. Da X nicht einen Winkel, sondern eine Funktion desselben bedeutet, so hat $X_2 - X_1$ nicht den Sinn (wie Analoges bei den Strecken auf einer Geraden der Fall war), daß es $\operatorname{tg}(\xi_2 - \xi_1)$ wäre, vielmehr ist letztere Größe gleich $X_2 - X_1 : 1 + X_1 X_2$.

Wählt man zur Bestimmung des Strahles X eine andere Größe Ξ, welcher X durch eine lineare Gleichung zugeordnet ist (vgl. § 15):

$$X = -(a + b\Xi) : (c + d\Xi), \quad ad - bc \lessgtr o,$$

so bedeutet dies, wenn gesetzt wird:

$$-\frac{a}{c} = X_2, \quad -\frac{b}{d} = X_4, \quad -\frac{a+b}{c+d} = X_3,$$

das Doppelverhältnis (vgl. § 15):

$$\Xi = (X X_2 X_3 X_4) = \frac{X_2 - X}{X_3 - X_2} : \frac{X_4 - X}{X_3 - X_4} = \frac{\sin \xi_2 - \xi}{\sin \xi_3 - \xi_2} : \frac{\sin \xi_4 - \xi}{\sin \xi_3 - \xi_4},$$

wenn $X_2 = \operatorname{tg}\xi_2$, $X_3 = \operatorname{tg}\xi_3$, $X_4 = \operatorname{tg}\xi_4$ ist.

Schneiden die Strahlen $X_1 X_2 X_3 X_4$ eine Gerade H in den Punkten $x_1 x_2 x_3 x_4$, so ist

$$(X_1 X_2 X_3 X_4) = (x_1 x_2 x_3 x_4).$$

Steht die Gerade H auf dem Anfangsstrahl $X = o$ senkrecht, so sind die Größen X den Größen x proportional, daraus folgt die Richtigkeit des Satzes im allgemeinen Fall aus der Invarianz des Doppelverhältnisses. Setzt man $a = A = \operatorname{tg} \alpha$, $c = -1$, $b = 1$, $d = A$, so folgt $\Xi = X - A : 1 + AX = \operatorname{tg}(\xi - \alpha)$, und die Bestimmung der Strahlen durch Ξ statt durch X hat die Bedeutung, daß der neue Anfangsstrahl $\Xi = o$ dem Strahl $X = A = \operatorname{tg} \alpha$ entspricht, daß er also um den Winkel α gegen den alten Anfangsstrahl gedreht ist. Das Doppelverhältnis in der neuen und der alten Bestimmungsweise bleibt natürlich unverändert. Ist $\alpha = \pm \frac{1}{2}\pi$, so ist $\Xi = -1 : X$.

Projiziert man zwei Punktquadrupel $x_1 x_2 x_3 x_4$, $x'_1 x'_2 x'_3 x'_4$ auf derselben oder auf verschiedenen Geraden, deren Doppelverhältnis dasselbe ist, von einem Punkt P aus durch Strahlen $X_1 X_2 X_3 X_4$ bezw. $X'_1 X'_2 X'_3 X'_4$, so ist

$$(X_1 X_2 X_3 X_4) = (X'_1 X'_2 X'_3 X'_4).$$

Gibt man zwei projektiven Punktreihen auf verschiedenen Geraden eine solche Lage, daß sie einen Punkt entsprechend gemein haben, so gehen die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen Punkt, die Punktreihen liegen perspektiv; denn ist x_1, x'_1 der gemeinsame Punkt, und verbindet man $x_2 x'_2$, $x_3 x'_3$ durch die Geraden $X_2 X_3$, die sich in P schneiden, und projiziert man x durch X, den entsprechenden Punkt x' durch X' von P aus, so muß $(X X_1 X_2 X_3) = (X' X_2 X_3 X_4)$ sein, und es muß demnach X mit X' zusammenfallen. Ein Strahlenbüschel trifft verschiedene gerade Linien in projektiven, genauer in perspektiven Punktreihen.

§ 23. Definitionen. Eine Punktreihe heißt einem Strahlenbüschel projektiv, wenn eine Gerade den Büschel in einer der ersten projektiven Punktreihe trifft, oder wenn ein Büschel die Punktreihe durch Strahlen projiziert, die dem ersten Büschel

projektiv sind. Strahlenbüschel, die projektive Punktreihen projizieren, sind einander projektiv oder kollinear zugeordnet, gleichviel ob sie auf demselben Träger liegen oder auf verschiedenen.

Bedeutet Ξ nicht denselben Strahl als X, sondern einen Strahl, der durch die Zahl Ξ genau so bestimmt wird als der Strahl X durch die Zahl X, so definiert

$$X = -(a + b\Xi) : (c + d\Xi)$$

eine kollineare oder projektive Verwandtschaft. Strahlenbüschel sind in Involution, wenn sie denselben Träger haben und von einer Geraden in Punktreihen in Involution geschnitten werden, oder wenn die ihre Kollineation bestimmende bilineare Gleichung symmetrisch ist. Die Doppelstrahlen können reell oder konjugiert imaginär sein, und die Involution kann in eine uneigentliche ausarten: Hyperbolische, elliptische und parabolische oder uneigentliche Involution.

Eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel heißen in Involution, wenn der gerade Träger vom Büschel in Punkten getroffen wird, die mit der Reihe in Involution sind. Harmonische Strahlen durch einen Punkt haben das Doppelverhältnis -1 und werden von einer Geraden in harmonischen Punkten getroffen. Zwei Punkte sind durch zwei Gerade harmonisch getrennt, wenn die Verbindungslinie der Punkte durch ihre Schnittpunkte mit den Geraden zwei durch die ersten harmonisch getrennte Punkte bestimmt. — Ist das Zentrum eines Strahlenbüschels unendlich fern, so ist derselbe ein Parallelstrahlenbüschel.

Sind die Strahlen zweier Büschel einander so zugeordnet, daß sich die entsprechenden Strahlen auf einer Geraden schneiden, so sagt man, sie liegen perspektiv. Die Verwandtschaft der Perspektivität ist ein besonderer Fall der Projektivität.

In der Involution $X\Xi + 1 = 0$ oder $X = -1 : \Xi$ stehen die entsprechenden Strahlen senkrecht aufeinander, und umgekehrt die Paare aufeinander senkrechter Strahlen bilden eine Involution. Die Doppelstrahlen $X = \pm i$ sind besonders merk-

würdig, sie gehen durch die sogenannten absoluten Punkte, wovon beim Kreise die Rede sein wird. Diese Strahleninvolution ist eine ausgezeichnete, die absolute, es gibt unter den Punktinvolutionen kein Analogon dazu.

In jeder Strahleninvolution gibt es ein und nur ein rechtwinkliges Paar, oder alle Paare stehen senkrecht aufeinander. Denn setzt man in der Gleichung:

$$dX\Xi + b(\Xi + X) + a = o$$

$\Xi = -1 : X$, so fließt daraus:

$$bX^2 + (a - d)X - b = 0, \quad X = \frac{d - a \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4b^2}}{2b}.$$

Der Ausdruck ist stets reell, und das Produkt der beiden Wurzeln ist -1, so daß die eine den einen Strahl, die andere den zugeordneten, beide zusammen das Paar bedeuten. Ist $b = 0$, $a = d$, also $X = -1 : \Xi$, so sind alle Paare senkrecht.

Punktkoordinaten in der Ebene.

§ 24. Koordinatenkreuz. Zur Bestimmung der Lage eines Punktes in einer Ebene kann man (nach Descartes) zwei gerade Linien wählen, welche einen von o und π verschiedenen Winkel ω einschließen und die das Koordinatenkreuz heißen. Zieht man durch einen Punkt Parallele mit diesen Geraden, den Koordinatenachsen, so schneidet die eine Parallele von der einen Achse, der x-Achse, eine Abszisse x, die andere auf der andern, der y-Achse die Abszisse y ab, die man zur Unterscheidung die Ordinate nennt. Durch Größe und Vorzeichen von x und y ist die Lage des Punktes vollständig bestimmt.

Eine Strecke $m_0 m$ ist der Größe nach durch die Gleichung:

$$s = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + 2(x - x_0)\cdot(y - y_0)\cos\omega}$$

bestimmt. Ist m_0 der Koordinatenanfang, so nennt man die Strecke Fahrstrahl oder Radius vector.

§ 25. Punkte einer Strecke. Die Größen $s_x = x - x_0$, $s_y = y - y_0$, die Parallelprojektionen der Strecke $m_0 m$ auf die Koordinatenachsen, nennt man die Koordinaten dieser Strecke. Durch Größe und Vorzeichen dieser Koordinaten ist die Größe und Richtung einer Strecke völlig gegeben, zur Bestimmung der Lage muß noch ein Punkt, etwa der Anfangspunkt oder der Endpunkt gegeben werden. Die Größe s des § 24 wird immer absolut genommen, so lange sich die Wurzel nicht ausziehen läßt. — Liegt ein Punkt m auf der Strecke $m_0 m_1$ oder deren Verlängerung, so ist:

$$x - x_0 : x_1 - x = y - y_0 : y_1 - y$$

und umgekehrt. Teilt man die Strecke im Verhältnisse von $p : q$, wo pq auch negativ sein können, so ist (Schwerpunkt):

$$x = \frac{x_0 q + x_1 p}{p + q}, \quad y = \frac{y_0 q + y_1 p}{p + q}.$$

Die Punkte, deren Koordinaten die angegebene Form haben, liegen auf einer Geraden und umgekehrt. Die Mitte zwischen zwei Punkten hat die Koordinaten $\frac{x_1 + x_2}{2}$, $\frac{y_1 + y_2}{2}$.

Sind m_1, m_2, m_3 die Ecken eines Dreiecks, so ist:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{1}{3}\left(2\,\frac{x_1 + x_2}{2} + x_3\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(x_1 + 2\,\frac{x_2 + x_3}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(2\,\frac{x_1 + x_3}{2} + x_2\right),$$

woraus folgt, daß sich die Mittellinien in einem Punkte schneiden, der sie im Verhältnis $1 : 2$ teilt.

In einem Viereck gehen die Verbindungslinien der Mitten gegenüberliegender Seiten, deren es drei Paare gibt, durch einen Punkt. — Die Mitte von $m_1 m_2$ hat die Abszisse $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, die Mitte von $m_3 m_4$ hat die Abszisse $\frac{1}{2}(x_3 + x_4)$. Die Mitte dieser beiden Punkte hat die Abszisse $\frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$, sie ist von der Zuordnung der Indices zu den einzelnen Punkten unabhängig. Damit ist der Satz erwiesen, denn für die Ordinaten gilt offenbar dasselbe.

Setzt man $p : q = \lambda$, so folgt für die Punkte xy der Strecke oder ihrer Verlängerung:

$$x = \frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda}.$$

§ 26. Die Streckensumme. Legt man durch parallele Verschiebung den Anfangspunkt einer Strecke an den Endpunkt einer andern, so heißt die Strecke vom Anfangspunkt der letzteren bis zum Endpunkte der ersteren die Streckensumme. Hat man mehrere Strecken (Vectoren) zu summieren, die der Richtung (auch dem Sinne) und der Größe nach gegeben sind, so hat man die dritte an die zweite usw. in gleicher Weise zu legen. Die Koordinaten der Streckensummen sind die Summen der Koordinaten der einzelnen Strecken. Ist die Streckensumme Null, so bilden die Strecken ein geschlossenes Polygon. In einer Streckensumme kann man die Posten beliebig vertauschen, ohne dieselbe zu ändern.

Im Folgenden werden immer rechtwinklige Koordinaten ($\omega = \frac{1}{2}\pi$) *vorausgesetzt, wenn nicht ausdrücklich anders verfügt wird. Dabei mag die positive y-Achse gegen die positive x-Achse so liegen, daß letztere durch eine positive Drehung — eine der eines Uhrzeigers entgegengesetzte Drehung — in die Lage der ersteren auf kürzestem Wege zu bringen ist.*

§ 27. Winkel der Strecken. Um den Winkel zweier Strecken zu definieren, kann man dieselben entweder bis zum gegenseitigen Schnitt verlängern oder (was auch auf den Raum Anwendung hat) parallel mit sich so verschieben, daß ihre Anfangspunkte zusammenfallen. Parallele Geraden oder Strecken bilden mit einer dritten denselben Winkel. Unter dem Winkel (s, s') versteht man den Winkel, um welchen die Strecke s' um ihren Anfangspunkt positiv gedreht werden muß, bis sie der Strecke s parallel liegt. Es ist dann $(s', s) = 2\pi - (s, s')$ oder $= -(s, s')$, wenn man Multipla von 2π, wie das oft geschieht, vernachlässigen darf. So findet man

$$(s, x) - (s, y) = \tfrac{1}{2}\pi, \ \cos(s, y) = \sin(s, x).$$

Kehrt man den Sinn der einen Strecke um, so wächst der Winkel um π, kehrt man den Sinn beider Strecken um, so bleibt er ungeändert.

Ist s die Strecke $m_0 m$, so ist (s absolut):

$$\cos(s, x) = (x - x_0) : s, \quad \cos(s, y) = \sin(s, x) = (y - y_0) : s.$$

Ist ferner s' die Strecke $m'_0 m'$, so findet man die Formeln:

$$ss' \cos(s, s') = ss' \cos(s', s) = (x - x_0)(x' - x'_0) + (y - y_0)(y' - y'_0),$$
$$ss' \sin(s', s) = (x - x_0)(y' - y'_0) - (y - y_0)(x' - x'_0).$$

Haben s und s' denselben Anfangspunkt, so ist, abgesehen vom Vorzeichen, $ss' \sin(s', s)$ zugleich der positive doppelte Inhalt des von ihnen eingeschlossenen Dreiecks, wenn $(s's)$ positiv ist, der negative, wenn $(s's)$ negativ ist. Man bringt denselben in die Form:

$$ss' \sin(s', s) = x_0 y - y_0 x + x y' - y x' + x' y_0 - y' x_0.$$

Die Strecken s, s' sind senkrecht zueinander, wenn:

$$(x - x_0)(x' - x'_0) + (y - y_0)(y' - y'_0) = 0,$$

parallel, wenn:

$$(x - x_0)(y' - y'_0) - (y - y_0)(x' - x'_0) = 0$$

oder $x - x_0 : y - y_0 = x' - x'_0 : y' - y'_0$ ist.

§ 28. Inhalt eines Polygons. Der doppelte Inhalt eines Dreiecks mit den Ecken $m_1 m_2 m_3$:

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3$$

ist positiv, wenn der Weg $m_1 m_2 m_3 m_1$ einer positiven Umdrehung entspricht, im andern Falle negativ. Es folgt dies aus der Betrachtung des sinus des Winkels irgend einer Ecke. Fällt m_3 auf den Koordinatenanfang, so ist der doppelte Inhalt $x_1 y_2 - x_2 y_1$. Ein beliebiges Polygon mit den Ecken $m_1 m_2 \ldots m_n$ wird mit Hilfe eines Punktes m, für den man am einfachsten den Koordinatenanfang nimmt, in n Dreiecke zerlegt. Summiert man die Dreiecke:

$$\tfrac{1}{2}(x y_\mu - y x_\mu + x_\mu y_{\mu+1} - y_\mu x_{\mu+1} + x_{\mu+1} y - y_{\mu+1} x),$$

so erhält man den doppelten Inhalt des Polygons durch die Formel:

$$x_1 y_2 - y_1 x_2 + x_2 y_3 - y_2 x_3 + \cdots\cdots + x_n y_1 - y_n x_1$$

positiv, wenn der Weg $m_1 m_2 \ldots m_n m_1$ einer positiven, negativ, wenn er einer negativen Umdrehung entspricht.

Obwohl ein n-Eck $\frac{1}{2}n(n-1)$ Seiten hat, so versteht man doch häufig genug unter einem (einfachen) n-Eck ein n-Eck-n-Seit. Man setzt stillschweigend voraus, daß die Ecken $m_1 m_2 \ldots m_n m_1$ in der Reihenfolge durch gerade Strecken verbunden sind, wie sie angeschrieben sind. Bildet das so erzeugte Polygon einen knotenlosen geschlossenen Zug, der ein Ebenenstück vollständig begrenzt, so ist die erhaltene Formel richtig. Schneidet jedoch eine später gezogene Seite eine frühere zwischen ihren Ecken, wie z. B. in einem sogenannten überschlagenen Viereck, so hat der Inhalt keinen eigentlichen Sinn. Die Polygonformel liefert dann eine Summe teils positiver, teils negativer Stücke, deren Sinn besonders zu untersuchen wäre. Es ist demnach bei Anwendung der Polygonformel eine gewisse Vorsicht geboten.

Die Formeln für den Dreiecks- und Polygoninhalt sind mit $\sin\omega$ zu multiplizieren, wenn die Koordinaten schiefwinklige mit dem Koordinatenwinkel ω sind.

Anwendung auf einen Satz von Gauß. In einem Vierseit liegen die Mitten zwischen gegenüberliegenden Ecken in einer Geraden. Die Ecken $m_1 m_2 m_3$ und bezw. $m_1 m_5 m_6$ mögen auf zwei zusammenstossenden Seiten des Vierecks liegen, m_4 ist die m_1 gegenüber liegende Ecke, und $m_2 m_4 m_6$ bezw. $m_3 m_4 m_5$ liegen auf zwei Geraden, bilden Seiten des Vierseits. Die Mitten μ_{14}, μ_{25}, μ_{36} haben die Koordinaten:

$$\xi_{14} = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_4),\ \eta_{14} = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_4);\ \xi_{25} = \tfrac{1}{2}(x_2 + x_5),$$
$$\eta_{25} = \tfrac{1}{2}(y_2 + y_5);\ \xi_{36} = \tfrac{1}{2}(x_3 + x_6),\ \eta_{36} = \tfrac{1}{2}(y_2 + y_6).$$

Bildet man den Inhalt des Dreiecks $\mu_{14}\mu_{25}\mu_{36}$ und beachtet, daß der Inhalt der Dreiecke $m_1 m_2 m_3$, $m_1 m_5 m_6$, $m_2 m_4 m_6$, $m_3 m_4 m_5$ Null ist, so findet man durch Ausführung der Dreiecksformel,

daß auch der Inhalt des Dreiecks $\mu_{12}\mu_{25}\mu_{36}$ Null ist, daß diese Punkte auf einer Geraden liegen. (Später einfacher.)

§ 29. Die Gleichungen der geraden Linie. Werden die Koordinaten eines Punktes m durch die Gleichungen gegeben:

$$x = x_0 + tM, \quad y = y_0 + tN,$$

wo der Parameter t als verfließende Zeit gedacht werden kann, so ist:

$$s = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = t\sqrt{M^2 + N^2},$$

woraus hervorgeht, daß die Strecke $m_0 m$ der Zeit proportional wächst. Nennen wir den Winkel, den eine solche Strecke mit der positiven x-Achse einschließt, β, so ist:

$$\cos\beta = \frac{x - x_0}{s} = \frac{tM}{t\sqrt{M^2 + N^2}} = \frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2}},$$

$$\sin\beta = \frac{N}{\sqrt{M^2 + N^2}}.$$

Der Winkel β ist von t unabhängig, woraus folgt, daß der Punkt m eine Gerade beschreibt, die durch m_0 geht, und mit der x-Achse den Winkel β einschließt. Ersetzt man den Parameter t mittels der Gleichungen $t = s : R$, $M = R\cos\beta$, $N = R\sin\beta$, $R = \sqrt{M^2 + N^2}$ durch einen neuen s, so hat dieser die geometrische Bedeutung, daß er die Strecke $m_0 m$ ist. Nimmt man in den Gleichungen, die durch diese Substitution erhalten werden:

$$x - x_0 = s\cos\beta, \quad y - y_0 = s\sin\beta,$$

s nur positiv, so erhält man nur die Punkte der Geraden, die zu m_0 im Sinne und in der Richtung β liegen. Ersetzt man β durch $\beta + \pi$, so erhält man die im entgegengesetzten Sinne liegenden Punkte. Das ist aber genau dasselbe, als wenn man für s negative Werte zuläßt. Durch den Winkel β ist demnach ein gewisser Sinn der Geraden bestimmt, dem positive Werte von s entsprechen, während negativen s Strecken von entgegengesetztem Sinne entsprechen. Der Sinn wird umgekehrt, wenn man β durch $\beta + \pi$ ersetzt. Während also im allgemeinen eine Strecke als absolut aufzufassen ist, so können wir, wenn

Strecken in einer gegebenen Geraden liegen, auf dieser die Strecken als Abszissen auffassen, ihnen ein Vorzeichen geben, und dadurch den Sinn der Strecken bestimmen. — Eliminiert man t aus den obigen Gleichungen, so folgt

$$(x - x_0) N - (y - y_0) M = 0$$

als Gleichung für die Punkte einer Geraden durch m_0. Durch Multiplikation mit einer Konstanten kann man dieser Gleichung verschiedene Formen geben, denen wir der Bequemlichkeit halber verschiedene Namen beilegen. Es ist

$Ax + By + C = 0$ die allgemeine Form,
$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ die Normalform,
$xu + yv + 1 = 0$ die dualistische Form,
$y = ax + b$ die aufgelöste Form,
$xy_1 - yx_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y - xy_2 = 0$ die Determinanten- oder Dreiecksform.

Wird die Gerade durch zwei Gleichungen mittels eines veränderlichen Parameters dargestellt, so nennen wir diese Darstellung eine Parameterform. Und zwar ist

$$x = \frac{a_1 + \lambda b_1}{a_3 + \lambda b_3} = \frac{b_1}{b_3} + \frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{b_3} t, \quad y = \frac{a_2 + b_2 \lambda}{a_3 + b_3 \lambda} = \frac{b_2}{b_3} + \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{b_3} t,$$

wo t eine Abkürzung für $1 : (a_3 + \lambda b_3)$ ist, die allgemeine Parameterform. Durchläuft der Parameter λ alle Zahlen, so durchläuft auch t alle Zahlen. Die Form in t stimmt mit der Form $x = x_0 + tM$, $y = y_0 + tN$ überein, woraus hervorgeht, daß xy wirklich die Punkte einer Geraden durchläuft, wenn λ alle Zahlen durchläuft. Auch durch Elimination von λ, die auf die allgemeine Gleichung einer Geraden führt, wird dies erwiesen. Die früheren Parameterformen stecken als spezielle Fälle in der allgemeinen. Setzt man $a_1 = x_0$, $b_1 = x_1$, $a_2 = y_0$, $b_2 = y_1$, $a_3 = b_3 = 1$, so erhält man die baryzentrische Form:

$$x = \frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda},$$

die wir auch schon kennen gelernt haben (§ 25).

Das Doppelverhältnis von irgend vier Punkten einer Geraden ist gleich dem Doppelverhältnisse der Abszissen dieser

Punkte, oder der Ordinaten, wegen der Projektivität, und es ist auch gleich dem Doppelverhältnisse der vier zugehörigen Parameterwerte, wenn die Gerade in irgend einer Parameterform gegeben ist.

§ 30. Diskussion der Geradengleichungen. Setzt man in einer Gleichung zwischen xy die eine Koordinate gleich Null, so erhält man eine Gleichung in der andern Ordinate, die die Schnittpunkte des zur Gleichung gehörigen geometrischen Ortes mit der betreffenden Koordinatenachse, also bei einer linearen Gleichung den Schnittpunkt der zugehörigen Geraden mit der Koordinatenachse liefert. Daraus folgt, die Quotienten $-C:A$, $-C:B$ bez. $p:\cos\alpha$, $p:\sin\alpha$; $-1:u$, $-1:v$ sind die Abschnitte der Geraden auf den Koordinatenachsen. Durch sie ist die Lage einer Geraden bestimmt.

Dividiert man die allgemeine Form der Geradengleichung mit $\sqrt{A^2+B^2}$, und richtet das Vorzeichen so ein, daß $C:\sqrt{A^2+B^2}$ negativ wird, so erhält man die Normalform, da man

$$A:\sqrt{A^2+B^2}=\cos\alpha, \quad B:\sqrt{A^2+B^2}=\sin\alpha$$

setzen kann. Ist $C=0$, so sind

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=0, \quad x\cos(\alpha+\pi)+y\sin(\alpha+\pi)=0$$

in gleicher Weise Normalformen, die sich durch das Vorzeichen allein unterscheiden.

Ist l die (absolute) Länge des vom Koordinatenanfang auf eine in der Normalform gegebene Gerade gefällten Lotes und ist φ der Winkel, den l mit der positiven x-Achse bildet, so folgt aus der Betrachtung des aus der Geraden und den beiden Koordinatenachsen gebildeten Dreiecks:

$$l=\frac{p}{\cos\alpha}\cos\varphi, \quad l=\frac{p}{\sin\alpha}\sin\varphi, \quad l\cos\alpha=p\cos\varphi,$$

$$l\sin\alpha=p\sin\varphi, \quad l^2=p^2, \quad l=p,$$

also

$$\cos\alpha=\cos\varphi, \quad \sin\alpha=\sin\varphi, \quad \varphi=\alpha.$$

In der Normalform ist demnach α der Winkel, den das vom Koordinatenanfange auf die Gerade gefällte Lot, die Normale,

mit der positiven x-Achse bildet, und p ist die Länge dieser Normale.

Fehlt in der Gleichung einer Geraden eine Koordinate, so ist die Gerade der betreffenden Achse parallel, fehlen beide Koordinaten, so kann die (unerfüllbare) Gleichung

$$\text{const.} = 0$$

als Symbol für die unendlich ferne (die uneigentliche) Gerade angesehen werden. In der aufgelösten Form ist a die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Gerade mit der positiven x-Achse bildet, b ist der Abschnitt auf der y-Achse. In der Determinantenform sind $m m_1 m_2$ Ecken eines Dreiecks, dessen Inhalt Null ist.

Unterscheiden sich die Gleichungen zweier Geraden nur im konstanten Gliede, so sind sie parallel.

§ 31. Entfernung eines Punktes von einer Geraden. Die Geraden

$$G = x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0, \quad H = (x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha$$

sind parallel. Die Entfernung des Koordinatenanfangs von H ist $q = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha$ oder $x_0 \cos(\alpha + \pi) + y_0 \sin(\alpha + \pi)$. Hieraus folgt für die Entfernung des Punktes m_0 von G, die, wenn der Koordinatenanfang zwischen den beiden Geraden liegt, die Summe, im anderen Falle die Differenz von p und q ist,

$$G^{(0)} = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p.$$

Sie ist negativ, wenn m_0 mit dem Koordinatenanfang auf derselben Seite von G liegt, im anderen Falle positiv.

Geht G durch den Koordinatenanfang, so ist das Vorzeichen auf der Seite positiv, nach welcher die (durch α bestimmte) Normale gezogen wird. Ist G in der allgemeinen oder dualistischen Form gegeben, so ist die Entfernung $m_0 G$ gleich dem absoluten Betrage von

$$(Ax_0 + By_0 + C) : \sqrt{A^2 + B^2}, \text{ bezw. } (ux_0 + vy_0 + 1) : \sqrt{u^2 + v^2},$$

in der aufgelösten Form gleich dem absoluten Betrage von

$$(y_0 - ax_0 - b) : \sqrt{1 + a^2}.$$

Ist die Gerade durch die Gleichungen

$$x = \xi + s\cos\beta, \quad y = \eta + s\sin\beta$$

gegeben, so ist $(\xi - x_0)\sin\beta - (\eta - y_0)\cos\beta$ die Entfernung. Die Koordinaten des Schnittpunktes des Lotes $(m_0 G)$ mit der in der allgemeinen Form gegebenen Geraden G sind:

$$x = x_0 - G^{(0)}A : (A^2 + B^2), \quad y = y_0 - G^{(0)}B : (A^2 + B^2).$$

§ 32. Winkel zweier Geraden. Zwei (in der allgemeinen Form gegebene) Gerade sind parallel, wenn $A : A' = B : B'$ ist, und stehen senkrecht aufeinander, wenn $AA' + BB' = 0$ ist. Ferner ist

$$\cos(\alpha' - \alpha) = \cos\alpha \cos\alpha' + \sin\alpha \sin\alpha'$$
$$= \cos(G', G) = \cos(G, G') = \pm (AA' + BB') : RR',$$
$$R^2 = A^2 + B^2, \quad R'^2 = A'^2 + B'^2,$$

worin die beiden Vorzeichen sich auf Winkel und Nebenwinkel beziehen. Weiter ist

$$\sin(G', G) = (AB' - BA') : RR'.$$

In der aufgelösten Form ist $\operatorname{tg}(G', G) = (a' - a) : (1 + aa')$.

Ist dieser Ausdruck positiv, so wird durch diese Formel der spitze Winkel gegeben. Ist $a' = -1 : a$, so stehen die Geraden senkrecht aufeinander. Sind die Geraden in die Normalform gebracht, so gibt die Cosinusformel den Winkel in dem und in dessen Scheitelwinkel der Koordinatenanfang nicht liegt.

§ 33. Schnittpunkte von Geraden. Die Geraden G, G' schneiden sich in dem Punkte

$$x : y : 1 = (BC' - CB') : (CA' - AC') : (AB' - BA').$$

Drei Gerade G, G', G'' gehen durch einen Punkt, wenn

$$A''(BC' - B'C) + B''(CA' - C'A) + C''(AB' - A'B) = 0$$

ist. Schneiden sie sich nicht in einem Punkte, so ist der doppelte Inhalt des eingeschlossenen Dreiecks, abgesehen vom Vorzeichen:

$$\frac{[A''(BC' - B'C) + B''(CA' - C'A) + C''(AB' - A'B)]^2}{(AB' - A'B)(A'B'' - A''B')(A''B - AB'')}$$

oder in der Normalform

$$\frac{[p\sin(\alpha''-\alpha')+p'\sin(\alpha-\alpha'')+p''\sin(\alpha'-\alpha)]^2}{\sin(\alpha''-\alpha')\sin(\alpha-\alpha'')\sin(\alpha'-\alpha)}.$$

Diese Formeln wollen wir später beweisen.

§ 34. Strahlenbüschel. Jede Gerade durch den Schnitt zweier Geraden G, H ist in der Form $G+\lambda H=0$ enthalten. Die Gleichung ist für jedes λ in xy linear, bedeutet daher eine Gerade, die den Punkt $G=0$, $H=0$ enthält. Man kann λ so einrichten, daß diese Gleichung durch die Koordinaten eines Punktes m_0 befriedigt wird. Dazu setze man (in leicht verständlicher Bezeichnung) $\lambda=-G^0:H^0$ und erhält so die Geichung $GH^0-G^0H=0$. Ist λ veränderlich (Büschelparameter), so bilden die Geraden $G+\lambda H=0$ einen Büschel. Ein anderer Büschel habe die Gleichung $J+\lambda' K=o$, er ist dem ersten projektiv, wenn $\lambda'=-(a+b\lambda):(c+d\lambda)$ ist, gleichviel, ob sich G und H, J und K in demselben Punkte schneiden oder nicht. — Hier machen wir von der sogenannten abgekürzten Methode Gebrauch, da in der Gleichung $G+\lambda H=o$ die Koordinaten wenigstens äußerlich nicht erscheinen. Wir bringen die Gleichung des zweiten Büschels dadurch, daß wir

$$cJ-aK=G',\quad dJ-bK=H'$$

setzen in die Form $G'+\lambda H'=o$. Die Geraden $G'H'$ (genauer $G'=o$, $H'=o$) schneiden sich in demselben Punkte als die Geraden JK. — Ist

$$G=Ax+By+C,\quad H=Lx+My+N,$$
$$G'=A'x+B'y+C',\quad H'=L'x+M'y+N',$$

und bezeichnen wir die Schnittpunkte des ersten Büschels mit der x-Achse mit x, die des zweiten mit x', so ist

$$\lambda=-(Ax+C):(Lx+N)=-(A'x'+C'):(L'x'+N'),$$

und es besteht zwischen xx' eine bilineare Gleichung. Die durch dieselben λ bestimmten Punktreihen auf der x-Achse, und folglich die Büschel sind einander projektiv. Vier Strahlen des einen Büschels entsprechen vier Strahlen des anderen mit dem-

selben Doppelverhältnis. Das Doppelverhältnis von vier Parameterwerten ist zugleich das Doppelverhältnis der Strahlen.

Die beiden Büschel $G + \lambda H = o$, $G - \lambda H = o$ sind symmetrisch projektiv, sie sind in Involution, und

$$G, G - \lambda H, \quad H, G + \lambda H \text{ oder } G, \mu G - \lambda H, \quad H, \mu G + \lambda H$$

sind harmonische, weil die Paare der Involution von deren Doppelstrahlen $G = o$, $H = o$ harmonisch getrennt sind.

Es sei $G_\mu = A_\mu x + B_\mu y + C_\mu$. Drei gerade Linien $G_1 G_2 G_3$ gehen durch einen Punkt, wenn sich drei Zahlen $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ so finden lassen, daß identisch, d. h. für alle xy

$$\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3 = 0$$

ist, und umgekehrt. Denn da diese Gleichung für den Schnittpunkt $G_1 = o$, $G_2 = o$ erfüllt ist, so muß dort auch $G_3 = o$ sein.

§ 35. Winkelhalbierende. Sind G und H in der Normalform gegeben, so sind

$$G - H = 0, \quad G + H = 0,$$

die Strahlen, welche Winkel und Nebenwinkel von G und H halbieren, denn sie bilden den Ort der Punkte, die gleich weit von beiden Geraden entfernt sind. Sie sind harmonisch durch G und H getrennt. Hälftet man die Winkel und Nebenwinkel des Dreiecks GHJ, so haben die halbierenden Geraden die Gleichungen

$$G - H = 0, \quad G + H = 0, \quad H - J = 0,$$
$$H + J = 0, \quad J - G = 0, \quad J + G = 0;$$

da nun identisch

$$(G - H) + (H - J) + (J - G) = 0,$$
$$(G + H) + (J - G) - (H + J) = 0,$$
$$(G - H) + (H + J) - (G + J) = 0,$$
$$(G + H) - (H - J) - (G + J) = 0$$

ist, so gehen diese 6 Strahlen viermal zu je dreien durch einen Punkt. Es sind die Mittelpunkte der ein- und angeschriebenen Kreise.

Die Höhenlinien im Dreieck. Die Lote von den Ecken eines Dreieckes $m_1 m_2 m_3$ auf die gegenüberliegenden Seiten haben nach § 27 die Gleichungen

$$H_1 = (x - x_1)(x_2 - x_3) + (y - y_1)(y_2 - y_3) = 0,$$
$$H_2 = (x - x_2)(x_3 - x_1) + (y - y_2)(y_3 - y_1) = 0,$$
$$H_3 = (x - x_3)(x_1 - x_2) + (y - y_3)(y_1 - y_2) = 0.$$

Da die Summe dieser Ausdrücke identisch Null ist, so schneiden sich diese drei Geraden in einem Punkte.

Die Mittellote im Dreieck. Die in den Mitten der drei Seiten errichteten Lote haben (wieder nach § 27) die Gleichungen

$$G_1 = (x - \tfrac{1}{2}(x_2 + x_3))(x_3 - x_2) + (y - \tfrac{1}{2}(y_2 + y_3))(y_3 - y_2) = 0,$$
$$G_2 = (x - \tfrac{1}{2}(x_3 + x_1))(x_1 - x_3) + (y - \tfrac{1}{2}(y_3 + y_1))(y_1 - y_3) = 0,$$
$$G_3 = (x - \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2))(x_2 - x_1) + (y - \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2))(y_2 - y_1) = 0.$$

Da die Summe $G_1 + G_2 + G_3$ identisch Null ist, so schneiden sich die drei Lote in einem Punkte, dem Mittelpunkt des umschriebenen Kreises.

§ 36. Fällt man von zwei Punkten $m_1 m_2$ Lote auf eine Gerade G, die von der Geraden $m_1 m_2$ in n getroffen wird, so sind die Lote den Strecken $m_1 n$, $m_2 n$ proportional, und man erhält mit Berücksichtigung des Sinnes

$$m_1 n : m_2 n = G^{(1)} : G^{(2)} = n m_1 : n m_2,$$

wenn $G^{(1)} G^{(2)}$ aus G dadurch hervorgehen, daß man für xy bezw. $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ setzt. — Werden die Seiten $m_2 m_3$, $m_3 m_1$, $m_1 m_2$ eines Dreiecks von einer Geraden G bezw. in $n_1 n_2 n_3$ getroffen, so ist

$$n_3 m_1 : n_3 m_2 = G^{(1)} : G^{(2)}, \quad n_1 m_2 : n_1 m_3 = G^{(2)} : G^{(3)},$$
$$n_2 m_3 : n_2 m_1 = G^{(3)} : G^{(1)}.$$

Durch Multiplikation dieser Gleichungen ergibt sich der Satz von Ceva

$$n_3 m_1 \cdot n_1 m_2 \cdot n_2 m_3 = n_3 m_2 \cdot n_1 m_3 \cdot n_2 m_1.$$

Der Satz läßt sich umkehren.

Legt man durch die Ecken des Dreiecks $m_1 m_2 m_3$ drei Transversalen, die die gegenüberliegenden Seiten in $n_1 n_2 n_3$

treffen und sich in einem Punkt schneiden, so ist (Menelaos)

$$n_1 m_3 \cdot n_2 m_1 \cdot n_3 m_2 = - n_1 m_2 \cdot n_2 m_3 \cdot n_3 m_1.$$

Durch m_1 gehe die Transversale G_1, durch m_2 gehe G_2, so ist

$$G_3 = G_1 G_2^{(3)} - G_2 G_1^{(3)} = 0$$

die Gleichung der durch m_3 gehenden Transversale. Alsdann ist

$$\frac{n_3 m_1}{n_3 m_2} = \frac{G_3^{(1)}}{G_3^{(2)}} = \frac{G_1^{(1)} G_2^{(3)} - G_2^{(1)} G_1^{(3)}}{G_1^{(2)} G_2^{(3)} - G_2^{(2)} G_1^{(3)}} = - \frac{G_2^{(1)} G_1^{(3)}}{G_2^{(3)} G_1^{(2)}} = - \frac{n_2 m_1}{n_2 m_3} \frac{n_1 m_3}{n_1 m_2},$$

womit der Satz, der sich umkehren läßt, erwiesen ist.

Mit Hilfe dieser Sätze lassen sich die harmonischen Beziehungen im Vierseit und Viereck aufdecken, doch wählen wir hierzu einen anderen Weg.

§ 37. Harmonische Punkte und Linien im Vierseit und Viereck. In einem Vierseit bestimmen zwei Nebenseiten (Diagonalen) auf der dritten Punkte, welche durch die auf ihr liegenden Ecken harmonisch getrennt sind. Es seien G und H zwei Seiten eines Vierseits und J sei eine Nebenseite, die den Schnittpunkt HG nicht enthält. Dann sind die Gleichungen der dritten und vierten Seiten in den Formen

$$J - \lambda G = o, \quad J - \mu H = o$$

enthalten. Die Gerade

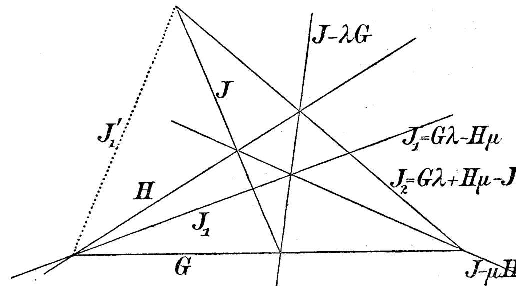
$$J_1 = G\lambda - H\mu = J - \mu H - (J - \lambda G) = o$$

geht durch die Ecken (GH), $(J - \lambda G)(J - \mu H)$, ist also eine weitere Nebenseite. Die Gerade $J_2 = G\lambda + H\mu - J$ geht durch die Ecken $(J - \lambda G, H)(J - \mu H, G)$, ist also die dritte Nebenseite. Die Gerade $J_1' = \lambda G + \mu H$ geht durch die Ecke (GH) und den Schnittpunkt der Geraden $J = o$, $G\lambda + H\mu - J = o$. Es sind aber die Geraden G, $G\lambda - H\mu$, H, $G\lambda + H\mu$ vier harmonische Strahlen, ihre Schnittpunkte mit J oder mit

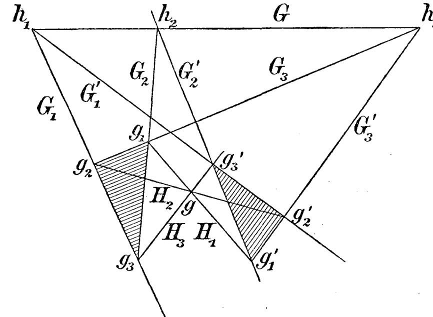
$$J_2 = \lambda G + \mu H - J$$

sind harmonische Punkte. Also bestimmen in jedem Vierseit zwei Diagonalen auf der dritten Punkte, die durch die auf ihr liegenden Ecken harmonisch getrennt sind.

In jedem Viereck bestimmen zwei Nebenecken (weitere Schnittpunkte der sechs Seiten des Vierecks) mit der dritten gerade Linien, die durch die jene Nebenecke enthaltenden Seiten



harmonisch getrennt sind, denn sie projizieren harmonische Punkte. Diese Vierecks- und Vierseitssätze führen unmittelbar zur Konstruktion des vierten harmonischen Elementes, wenn drei und deren Zuordnung gegeben sind. Diese Konstruktion kann als aus den Elementen bekannt vorausgesetzt werden.



§ 38. Satz von Desargues. Die Geraden

$$G_1 = o, \quad G_2 = o, \quad G_3 = o$$

einerseits und die Geraden

$$G_1' = G_1 - \lambda_1 G = o, \; G_2' = G_2 - \lambda_2 G = o, \; G_3' = G_3 - \lambda_3 G = o$$

bilden zwei Dreiseite, deren Seiten sich zu je zweien, die wir entsprechende nennen, auf der Geraden G in den Punkten $h_1 h_2 h_3$ schneiden. Die Geraden

$$H_1 = \lambda_2 G_3 - \lambda_3 G_2 = \lambda_2 G_3' - \lambda_3 G_2' = o$$
$$H_2 = \lambda_3 G_1 - \lambda_1 G_3 = \lambda_3 G_1' - \lambda_1 G_3' = o$$
$$H_3 = \lambda_1 G_2 - \lambda_2 G_1 = \lambda_1 G_2' - \lambda_2 G_1' = o$$

verbinden bezw. die Ecken

$$g_1 = (G_2 G_3),\ g_1' = (G_2' G_3');\ g_2 = (G_3 G_1),\ g_2';\ g_3,\ g_3';$$

die wir entsprechende nennen. Da aber

$$H_1 \lambda_1 + H_2 \lambda_2 + H_3 \lambda_3 \equiv 0$$

ist, so gehen sie durch einen Punkt. *Gehen die Seiten zweier Dreiseite paarweise durch drei Punkte einer Geraden, so liegen die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Ecken auf drei Geraden durch einen Punkt.*

Man sagt von zwei solchen Dreiecken, daß sie sich in perspektiver Lage befinden. Der Satz von Desargues gehört in der projektiven Geometrie zu den Fundamentalsätzen, und ist der einzige, der dort nicht in der Ebene erwiesen werden kann, sondern räumliche Hilfsmittel erfordert. — Die Umkehrung des Satzes wollen wir im nächsten Kapitel mit dem Prinzip der Dualität behandeln.

§ 39. Übungsaufgaben. Welches ist der Ort, in dem sich die entsprechenden Strahlen zweier projektiven Strahlenbüschel

$$G + \lambda H = o, \quad G + \lambda H' = o$$

schneiden, wenn diese einen Strahl ($\lambda = o$) entsprechend gemein haben?

Einem Dreieck seien Rechtecke so eingeschrieben, daß zwei Ecken auf einer Seite des Dreiecks, der Grundlinie, die beiden anderen je auf den anderen Seiten liegen. Welches ist der Ort der Mitten dieser Rechtecke? Der Ort enthält offenbar die Mitten der Höhe und der Grundlinie des Dreiecks.

Dualität. Linienkoordinaten.

§ 40. Dualität. Eine Ebene kann ebensowohl als Punktfeld, wie als Geradenfeld angesehen werden, es gibt also eine dualistische Auffassung der Ebene, die eine nahe Verwandtschaft

zwischen Sätzen erkennen läßt, die auf den ersten Blick nichts miteinander zu tun zu haben scheinen. Zwei Punkte bestimmen eine Gerade, zwei gerade Linien bestimmen einen Punkt, sind dualistisch gegenüberstehende Sätze. Ein Dreieck hat drei Seiten, ein Dreiseit hat drei Ecken. Ein Viereck hat sechs Seiten und drei Nebenecken (weitere Schnittpunkte der sechs Seiten), ein Vierseit hat sechs Ecken und drei Nebenseiten (Diagonalen). Eine n-Eck hat $\frac{1}{2}n(n-1)$ Seiten und

$$\frac{1}{8}n(n-1)(nn-5n+6)=\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

Nebenecken, ein n-Seit hat $\frac{1}{2}n(n-1)$ Ecken und

$$\frac{1}{8}n(n-1)(nn-5n+6)$$

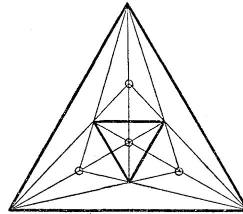
Nebenseiten. Eine Gerade ist Träger einer Punktreihe, ein Punkt ist Träger einer Strahlenreihe (eines Büschels). Wie man die Gerade als Sammelbegriff für eine gerade Punktreihe auffassen kann, so kann man den Punkt als Sammelbegriff für eine Strahlenreihe, einen Strahlenbüschel auffassen. Eine sehr instruktive Art diese Dualität kennen zu lernen, bietet eine einfache geometrisch-mechanische Konstruktion, die wir hier geben, obschon dieser Mechanismus räumliche, nicht bloß in einer Ebene liegende Gebilde benutzt, doch zur Einführung in die Polarentheorie sehr nützlich ist (Figur auf Seite 41).

Nimmt man außerhalb der Ebene E einen festen Punkt n an, legt durch denselben eine Ebene γ und eine auf dieser senkrechte Gerade Γ und läßt dies in sich starre System $(\gamma\Gamma)$ sich frei um n bewegen, so bestimmt Γ in jeder Lage einen Punkt g und γ eine Gerade G in E. Durch g ist G und durch G ist g völlig bestimmt. Es mögen der Punkt und die Gerade Pol und Polare genannt werden (der Sinn dieses Wortes wird später erweitert). Dreht sich γ um eine in ihr liegende Gerade Δ, so erzeugt sie in E einen Strahlenbüschel, dessen Träger der Schnittpunkt $(\Delta E)=d$ ist. Dabei beschreibt Γ eine auf Δ senkrechte Ebene δ, die in E eine Gerade D bestimmt, sie ist die Polare von d. Dem Strahlenbüschel d ist demnach eine gerade Punktreihe, dem Punkt d eine Gerade D durch unsere Festsetzungen zugeordnet. So entspricht in dieser Zuordnung

jedem Punkte eine Gerade, jeder Geraden ein Punkt, jedem Strahlenbüschel entspricht eine gerade Punktreihe und jeder geraden Punktreihe ein Strahlenbüschel durch einen Punkt. Liegen die Träger einer Reihe von Strahlenbüscheln auf einer Geraden, so daß die Büschel einen Strahl gemein haben, so haben die ihnen entsprechenden geraden Punktreihen einen Punkt gemein, ihre Träger gehen durch einen Punkt. Die Polaren aller Punkte einer Geraden gehen durch einen Punkt, den Pol der Geraden. Der Verbindungslinie zweier Punkte entspricht der Schnittpunkt ihrer Polaren. Dem Schnittpunkte zweier Geraden entspricht die Verbindungslinie ihrer Pole. Vier harmonische Punkte entsprechen vier harmonischen Strahlen, weil ein Vierseit auf ein Viereck durch unsere Beziehung abgebildet, eindeutig bezogen wird.

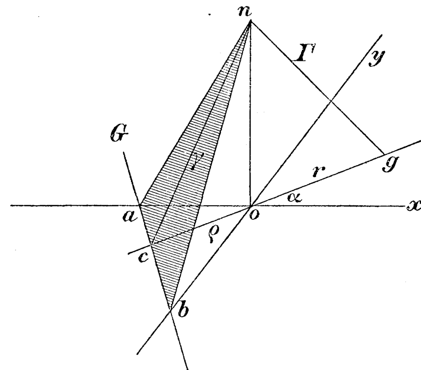
Als ein Beispiel für die Fruchtbarkeit des Prinzips der Dualität wählen wir den Satz von Desargues (s. Figur auf Seite 37). Die Bezeichnungen des § 38 werden beibehalten. Lassen wir die Ebene γ der Reihe nach durch $G\,G_1\,G_2\,G_3\,G_1'\,G_2'\,G_3'$ gehen, so bestimmt die Gerade Γ bezw. deren Pole $g\,g_1\,g_2\,g_3\,g_1'\,g_2'\,g_3'$. Den Dreiseiten $G_1\,G_2\,G_3$, $G_1'\,G_2'\,G_3'$ entsprechen die Dreiecke $g_1 g_2 g_3$, $g_1' g_2' g_3'$. Den Ecken $(G_2\,G_3)\,(G_2'\,G_3')$ entsprechen die Seiten $g_2 g_3$ bezw. $g_2' g_3'$, und der Verbindungslinie H_1 dieser Ecken entspricht der Schnittpunkt h_1 der beiden Seiten. Ebenso entsprechen den Verbindungslinien $H_2\,H_3$ der weiteren Eckenpaare der Dreiseite als Pole die Schnittpunkte $h_2\,h_3$ der weiteren Seiten der Dreiecke. Nun wurde bewiesen, daß die drei Geraden $H_1\,H_2\,H_3$ durch einen Punkt g gehen. Mithin liegen die Punkte $h_1\,h_2\,h_3$ auf einer Geraden G. *Gehen also die Verbindungslinien der Eckenpaare zweier Dreiecke durch einen Punkt, so schneiden sich die Seiten dieser Dreiecke paarweise in drei Punkten einer Geraden.* Die Dreiecke heißen perspektive. — Sind zwei Seiten eines Dreieckes zwei Seiten eines anderen ihm perspektiven Dreiecks parallel, so sind auch die dritten parallel. Der Schnittpunkt der Verbindungslinien der Ecken heißt in diesem Falle Ähnlichkeitspunkt.

Liegen die Ecken zweier gleichschenkliger Dreiecke zur Verbindungslinie der dritten Ecken symmetrisch, so sind die beiden Dreiecke einander doppelt perspektiv.



In nebenstehender Figur liegen zwei gleichseitige Dreiecke einander vierfach perspektiv. Die Perspektivitätszentren sind durch kleine Kreise angedeutet. Projiziert man die Figur durch Zentralprojektion in eine andere Ebene, so befreit man die Figur von der Spezialität der Gleichseitigkeit.

§ 41. Diese Ergebnisse müssen nun rechnerisch behandelt werden. Der Punkt n habe von der Ebene E die Entfernung Eins, der Fußpunkt des von ihm auf E gefällten Lotes o sei der Anfang von rechtwinkligen Koordinaten in E. Der Punkt g in E werde mit n durch die Gerade Γ verbunden, auf der in n die Ebene γ senkrecht steht. Die Spur dieser Ebene in E sei die Gerade G. Die Verlängerung der Geraden go, deren Länge r sein mag, treffe G in c in der Entfernung ϱ von o. Der Winkel (rx) werde mit α bezeichnet, so daß



$u = r\cos\alpha$, $v = r\sin\alpha$ die Koordinaten von g sind, und $(\varrho x) = \alpha + \pi$ ist. Die Linie nc steht senkrecht auf Γ, weil γ senkrecht auf Γ steht. Der Pythagoräische Lehrsatz liefert die Beziehung $r\varrho = 1$. Die Ebene gnc steht senkrecht auf E und Γ, folglich steht die Gerade ϱ senkrecht auf G. Damit ist die Gleichung dieser Geraden gegeben

$$x\cos(\alpha + \pi) + y\sin(\alpha + \pi) - \varrho = 0.$$

Multipliziert man mit $-r$, so folgt die Gleichung

$$ux + vy + 1 = o.$$

Dem Punkt $u = o$, $v = o$ entspricht als Polare die unendlich ferne Gerade. Ist

$$u = (u_1 + \lambda u_2) : (1 + \lambda), \quad v = (v_1 + \lambda v_2) : (1 + \lambda),$$

so ist die Polare dieses Punktes

$$(u_1 + \lambda u_2)x + (v_1 + \lambda v_2)y + 1 + \lambda = o$$

oder

$$(u_1 x + v_1 y + 1) + \lambda (u_2 x + v_2 y + 1) = o.$$

Nimmt man λ als veränderlich an, so erhält man einen linearen Strahlenbüschel, der die beiden Geraden

$$u_1 x + v_1 y + 1 = o, \quad u_2 x + v_2 y + 1 = o$$

enthält, also durch ihren Schnittpunkt geht. Es folgt:

Die Polaren der Punkte einer Geraden gehen durch einen Punkt.

Die Gerade durch die Punkte $u_1 v_1$, $u_2 v_2$ hat die Gleichung

$$x (v_1 - v_2) + y (u_2 - u_1) + u_1 v_2 - u_2 v_1 = o,$$

ihr Pol hat die Koordinaten

$$(v_1 - v_2) : (u_1 v_2 - u_2 v_1), \quad (u_2 - u_1) : (u_1 v_2 - u_2 v_1),$$

ist also der Schnittpunkt der beiden Geraden

$$u_1 x + v_1 y + 1 = o, \quad u_2 x + v_2 y + 1 = 0$$

Es folgt:

Die Polaren der Punkte einer Geraden gehen durch den Pol dieser Geraden. Die Punkte

$$\frac{u_1 + \lambda u_2}{1 + \lambda}, \quad \frac{v_1 + \lambda v_2}{1 + \lambda}$$

und ihre Polaren

$$u_1 x + v_1 y + 1 + \lambda (u_2 x + v_2 y + 1) = o$$

sind einander projektiv zugeordnet, denn die Schnittpunkte der Polaren mit der x-Achse

$$x = -(1 + \lambda) : (u_1 + \lambda u_2)$$

sind jenen Punkten projektiv zugeordnet. Das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden ist gleich dem Doppelverhältnis ihrer Polaren. Vier harmonischen Punkten einer Geraden entsprechen vier harmonische Strahlen als ihre Polaren.

Die Pole aller Geraden $x + \lambda y - u - \lambda v = o$ durch den Punkt uv haben die Koordinaten

$$x = \frac{-1}{u + \lambda v}, \quad y = \frac{-\lambda}{u + \lambda v}, \quad y = \lambda x.$$

Es folgt

$$ux + \lambda v x + 1 = o, \quad \lambda x = -(1 + ux) : v,$$

dies eingesetzt in $y - \lambda x = o$ gibt $ux + vy + 1 = 0$, die Polare von uv. Die Pole aller Geraden durch einen Punkt liegen auf einer Geraden, der Polare des Punktes.

§ 42. Linienkoordinaten. Sind die Abschnitte, die eine Gerade G auf der x- und y-Achse bestimmt, bezw. $-1 : u$, $-1 : v$, so ist die Lage der Geraden durch uv völlig bestimmt, mit der einen Ausnahme, daß $u = \infty$, $v = \infty$ ist. Läßt man uv in einem bestimmten Verhältnisse gegen Unendlich konvergieren, so gelangt man zu einer bestimmten Geraden durch den Koordinatenanfang. Die Größen uv heißen die Linienkoordinaten der Geraden G. Die Gleichung der Geraden G in gewöhnlichen Punktkoordinaten ist $ux + vy + 1 = 0$. Hält man aber den Punkt xy fest, betrachtet die Gleichung in Linienkoordinaten, sucht also alle Geraden $G G' G'' \cdots$, deren Koordinaten uv, $u'v'$, $u''v'' \cdots$ der Gleichung $ux + vy + 1 = 0$ genügen, so erhält man einen Strahlenbüschel, dessen Träger der Punkt xy ist. Man sagt, die Gleichung $xu + yv + 1 = 0$ bedeute in Linienkoordinaten einen Punkt, nämlich den Träger des Büschels. Die Gleichung $ux + vy + 1 = 0$ bedeutet in Punktkoordinaten die Polare eines Punktes, dessen rechtwinklige Koordinaten uv sind, in Linienkoordinaten bedeutet sie den Pol der Geraden, deren Linienkoordinaten xy sind. Denn bezeichnen wir einen Augenblick die laufenden rechtwinkligen Koordinaten mit $\xi\eta$, so ist

$$\xi x + \eta y + 1 = 0$$

eine Gerade, deren Linienkoordinaten xy sind, xy ist aber der Pol der Geraden $\xi x + \eta y + 1 = 0$. Also die Polare des Punktes xy, der in Linienkoordinaten durch die Gleichung

$$ux + vy + 1 = 0$$

gegeben ist, hat zur Polare eine Linie, deren Linienkoordinaten xy sind. — Wie in einer Geraden alle ihre Punkte zusammengefaßt werden, so werden in einem Punkte alle durch ihn gehenden geraden Linien oder Strahlen zusammengefaßt. — Die Gleichung $ux + vy + 1 = 0$ in Linienkoordinaten ist nicht die allgemeine, sondern eine spezielle, die wir die dualistische Form nennen, wie wir sie auch in Punktkoordinaten die dualistische nannten.

Die allgemeine lineare Gleichung $Au + Bv + C = o$ bedeutet ebenfalls einen Punkt, denn setzt man $A : C = x$, $B : C = y$, so erhält man die dualistische Form, aus der hervorgeht, daß unsere Gleichung den Punkt bedeutet, dessen rechtwinklige Koordinaten $x = A : C$, $y = B : C$ sind.

Die Gleichung $uA + C = 0$ oder $u = a$ bedeutet einen Punkt (einen Büschelträger) auf der u- (oder x-) Achse, $v = b$ einen solchen auf der v-Achse. Die Gleichung $uA + vB = 0$ läßt sich nicht in die dualistische Form bringen. Sie bedeutet einen uneigentlichen, einen unendlich fernen Punkt, oder einen Parallelstrahlenbüschel, dessen Richtung durch das Verhältnis

$$-\frac{1}{u} : -\frac{1}{v} = -A : B$$

gegeben ist. Es sind die Abschnitte der verschiedenen Strahlen des Büschels auf den Koordinatenachsen einander proportional. Die symbolische Gleichung const. $= 0$ bedeutet den Koordinatenanfang.

§ 43. Der gemeinsame Strahl zweier Büschel, also die Verbindungslinie zweier Punkte

$$g = ux + vy + 1 = 0, \quad g' = ux' + vy' + 1 = 0$$

besitzt die Linienkoordinaten

$$u = (y - y') : (xy' - yx'), \quad v = (x' - x) : (xy' - yx').$$

Ist $xy' - yx' = 0$, so geht der Strahl durch den Koordinatenanfang.

Punktreihen. Ist λ eine willkürliche Veränderliche, so bedeutet

$$g + \lambda g' = (x + \lambda x')\, u + (y + \lambda y')\, v + 1 + \lambda = 0$$

eine gerade Punktreihe (eigentlich eine Reihe von Büschelträgern, welche auf einer Geraden liegen), deren Punkte die rechtwinkligen Koordinaten

$$(x + \lambda x') : (1 + \lambda), \quad (y + \lambda y') : (1 + \lambda)$$

haben.

Die Punktreihen $g + \lambda h = 0$, $g' + \lambda' h' = 0$ sind projektive, wenn $\lambda' = -(a + b\lambda) : (c + d\lambda)$ ist. Die Punkte g, $g + \lambda h$, h, $g - \lambda h$ sind harmonische.

Punkte in gerader Linie. Drei in Linienkoordinaten gegebene Punkte g_1, g_2, g_3 liegen in einer Geraden, wenn

$$x_1 y_2 - y_1 x_2 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - y_3 x_1 = 0$$

ist, oder wenn sich drei Zahlen λ_1, λ_2, λ_3 finden lassen, so daß identisch (vergl. § 34)

$$\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 = 0$$

ist, gleichviel, ob die g in dualistischer oder allgemeiner Form gegeben sind.

Sind $g_1 g_2 g_3$ die in der dualistischen Form gegebenen Ecken eines Dreiecks, so bedeutet

$$g_1 + g_2 + g_3 = 0$$

einen Büschel (oder einen Punkt, seinen Träger), welcher die Geraden $g_1 + g_2 = 0$, $g_3 = 0$; $g_2 + g_3 = 0$, $g_1 = 0$; $g_3 + g_1 = 0$, $g_2 = 0$ enthält, und da $g_1 + g_2$ die Mitte von g_1 und g_2 ist, so heißt dies: Die drei Mittellinien eines Dreiecks gehen durch einen Punkt (vergl. § 25).

§ 44. Bestimmung eines Punktes durch einen Parameter. So wie die Punkte einer Geraden durch einen Parameter t in der Form dargestellt werden konnten

$$x = x_0 + tA, \quad y = y_0 + tB,$$

so lassen sich die Strahlen eines Büschels durch einen Punkt in der Form

$$u = u_0 + tA, \quad v = v_0 + tB$$

darstellen. Ein solcher Strahl gehört zu dem Büschel

$$(u - u_0) B - (v - v_0) A = uB + v(-A) + Av_0 - Bu_0 = 0,$$

und die rechtwinkligen Koordinaten seines Trägers sind

$$x = B : (Av_0 - Bu_0), \quad y = A : (Bu_0 - Av_0).$$

Jedem Werte von t entspricht ein bestimmter Strahl des Büschels. Sind t, t_1, t_2 drei Strahlen, $t = 0$ der vierte, und ist (siehe § 21)

$$(t_1 + t_2) t = 2 t_1 t_2,$$

so sind sie harmonische, t_1 und t_2 sind einander zugeordnet. Denn das Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte mit der u-Achse

$$u_0, \; u_0 + t_1 A, \; u_0 + tA, \; u_0 + t_2 A$$

ist -1.

Natürlich bedeuten auch die Gleichungen

$$u = (a_1 + \lambda b_1) : (a_3 + \lambda b_3), \quad v = (a_2 + \lambda b_2) : (a_3 + \lambda b_3)$$

in Linienkoordinaten einen Punkt, es ist aber nicht nötig, länger dabei zu verweilen, wegen der Analogie mit der Parametergleichung einer Geraden in Punktkoordinaten.

Analytisch beruht das Prinzip der Dualität auf der Möglichkeit, eine analytische Formel oder eine Reihe analytischer Formeln einmal in Punktkoordinaten zu interpretieren, ein andermal in Linienkoordinaten. So erhält man zu einem System von Sätzen ein zugeordnetes System neuer Sätze, die eben den ersten dualistisch gegenüber stehen. Der Größe einer Strecke steht nicht etwa die Größe eines Winkels gegenüber, deshalb haben nur solche Sätze ein dualistisches Gegenstück, die Größenverhältnisse nicht enthalten, sondern nur Lagen- und Schnittverhältnisse. Die Funktionszeichen sind Gefäße, die einen anderen Wein liefern, wenn man sie am uv-Hahn anzapft, als am xy-Hahn.

Faßt man z. B. die GH des § 38 als Gleichungen in Linienkoordinaten auf, so bedeuten GH Punkte, $G_1 G_2 G_3 G_1' G_2' G_3'$ sind nicht mehr Dreiseite, sondern Dreiecke usw., man liest aus diesen Gleichungen (vergl. § 38) unmittelbar den Teil des Satzes von Desargues ab, den wir in § 40 erwiesen haben.

Vom Kreise.

§ 45. In der elementaren Geometrie wird nach der Geraden der Kreis behandelt, deshalb empfiehlt es sich, diesen auch in der analytischen Behandlung zunächst folgen zu lassen.

Der geometrische Ort aller Punkte, die von einem festen Punkte mit den Koordinaten m, n gleich weit entfernt sind, ist ein Kreis. Die Koordinaten der Kreispunkte genügen der Gleichung

$$K = (x - m)^2 + (y - n)^2 - k^2 = x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0,$$

worin $p = m^2 + n^2 - k^2$ ist. Die Größen mnp bestimmen einen Kreis vollständig und können deshalb Koordinaten des Kreises heißen. Reelle Koordinaten entsprechen dann freilich nicht immer einem reellen Kreise, sondern einem imaginären oder idealen Kreise, wenn $m^2 + n^2 - p < o$ ist. Die beiden ersten Koordinaten bedeuten den immer reellen Mittelpunkt des Kreises, die geometrische Bedeutung der letzten Koordinate wird später gegeben. Der Radius des Kreises ist $\sqrt{m^2 + n^2 - p}$. Die in obiger Form enthaltene Kreisgleichung heißt die Hauptform, die allgemeine Form ist

$$D(x^2 + y^2) + 2Ax + 2By + C = 0$$

und es bedeuten $-A:D$ und $-B:D$ die Koordinaten des Mittelpunktes, und $\sqrt{A^2 + B^2 - CD}:D$ den Radius.

Daß die allgemeine Gleichung zweiten Grades

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

nur dann einen Kreis bedeutet, wenn $a_{12} = 0$, $a_{22} = a_{11}$ ist, lehrt die spätere Diskussion dieser Gleichung.

§ 46. Durch drei Punkte $g_1 g_2 g_3$ ist ein Kreis bestimmt. Wird zur Abkürzung $x_\mu{}^2 + y_\mu{}^2 = r_\mu{}^2$ gesetzt, so ist die Gleichung des durch $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ gehenden Kreises die:

$$\begin{aligned}
&(x^2 + y^2)\,(x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3)\\
&- x\,(r_1{}^2 y_2 - r_2{}^2 y_1 + r_2{}^2 y_3 - r_3{}^2 y_2 + r_3{}^2 y_1 - r_1{}^2 y_3)\\
&+ y\,(r_1{}^2 x_2 - r_2{}^2 x_1 + r_2{}^2 x_3 - r_3{}^2 x_2 + r_3{}^2 x_1 - r_1{}^2 x_3)\\
&- r_1{}^2 (x_2 y_3 - x_3 y_2) - r_2{}^2 (x_3 y_1 - x_1 y_3) - r_3{}^2 (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0.
\end{aligned}$$

Die Mittelpunktskoordinaten werden unendlich groß, wenn die drei Punkte auf einer Geraden liegen, der Kreis artet in eine Gerade aus, der aber die unendlich ferne Gerade zu adjungieren ist. Der Koeffizient von $x^2 + y^2$ ist der doppelte Inhalt des Dreiecks $g_1 g_2 g_3$.

Ist $x_3 = y_3 = 0$, so ist die Gleichung einfacher

$$(x^2 + y^2)(x_1 y_2 - x_2 y_1) - x(r_1^2 y_2 - r_2^2 y_1) + y(r_1^2 x_2 - r_2^2 x_1) = 0.$$

§ 47. Tangente. Linienkoordinaten. Sind $x'y'$, $x''y''$ zwei beliebige Punkte, so hat eine durch sie gehende Gerade die Gleichung

$$(x - x')(y'' - y') + (y - y')(x' - x'') = 0.$$

Liegen aber die beiden Punkte auf dem Kreise K,

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0,$$

so ist

$$y''^2 - y'^2 + x''^2 - x'^2 - 2m(x' - x'') - 2n(y'' - y') = 0$$

$$(y'' - y')(y' + y'' - 2n) = (x' - x'')(x' + x'' - 2m).$$

Setzt man den hieraus fließenden Wert für $y'' - y'$ in die Gleichung der Geraden ein und unterdrückt den Faktor $x'' - x'$, so erhält man für die Sekante die Gleichung

$$(x - x')(x' + x'' - 2m) + (y - y')(y' + y'' - 2n)$$
$$= x(x' + x'' - 2m) + y(y' + y'' - 2n) + p - x'x'' - y'y'' = 0,$$

die die beiden Punkte symmetrisch enthält. Läßt man $x''y''$ auf $x'y'$ fallen, so erhält man hieraus als Gleichung der Tangente im Punkte $x'y'$ die Gleichung

$$xx' + yy' - m(x + x') - n(y + y') + p = 0$$

oder

$$(x - m)(x' - m) + (y - n)(y' - n) - k^2 = 0.$$

Die Gleichung der Normale in $x'y'$ ist nach § 27

$$(x - x')(y' - n) - (y - y')(x' - m) = 0,$$

sie geht durch den Punkt $x = m$, $y = n$, also durch den Mittelpunkt, woraus der Satz folgt, daß in einem Kreise der Radius

senkrecht auf der Tangente im Berührungspunkte, oder, wie man kürzer sagt, senkrecht auf dem Kreise steht.

Soll eine Gerade $G(x,y) = Ax + By + C = 0$ Tangente an den Kreis K sein, so muß ihre Entfernung vom Mittelpunkte dem Radius gleich sein, woraus sich ergibt

$$G^2(m,n) - (A^2 + B^2)(m^2 + n^2 - p) = 0.$$

Setzt man $C = 1, A = u, B = v$, so schreibt sich diese Gleichung

$$u^2(p - n^2) + v^2(p - m^2) + 2uvmn + 2mu + 2nv + 1 = 0.$$

Diese Gleichung bedeutet in Linienkoordinaten alle möglichen Tangenten an einem Kreise K. Der Kreis ist die Stützkurve des durch die Gleichung definierten Strahlenbüschels zweiter Ordnung; man sagt deshalb, diese Gleichung sei die Gleichung eines Kreises in Linienkoordinaten. Ist der Koordinatenanfang der Mittelpunkt des Kreises, so ist seine Liniengleichung

$$(u^2 + v^2)p + 1 = 0.$$

Ist $x' = \xi$, $y' = \eta$ ein beliebiger Punkt, so nennt man die Gerade $K(xy;\xi\eta)$ oder kürzer $K(x;\xi)$ gleich

$$x\xi + y\eta - m(x + \xi) - n(y + \eta) + p = 0$$

die Polare des Punktes $\xi\eta$ in bezug auf den Kreis K. Sie geht für $m = n = 0$, $p = 1$ in die des § 42 über. Ihre geometrische Bedeutung wird im § 50 erörtert werden.

Die Polare des Punktes $x = u$, $y = v$ für den (idealen) Kreis $x^2 + y^2 + 1 = 0$ ist $uy + yv + 1 = 0$, also die im § 42 definierte Polare.

§ 48. Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kreis. Die Gerade G habe die Gleichung $x \cos\alpha + y \sin\alpha - d = 0$, oder $x = \xi - s \sin\alpha$, $y = \eta + s \cos\alpha$. Für $\xi\eta$ nehmen wir die Mitte der Sekante an, also nach § 31

$$\xi = m - \cos\alpha\, G(m,n), \quad \eta = n - \sin\alpha\, G(m,n),$$

wo $G(m,n)$ die Länge des Lotes vom Kreismittelpunkte auf die Gerade ist. Die Strecke vom Punkt $\xi\eta$ bis zum Schnitt mit dem

Kreise ist $\sqrt{k^2 - G^2(m,n)}$, $k^2 = m^2 + n^2 - p$, folglich haben die Schnittpunkte die Koordinaten

$$x = m - \cos\alpha\, G(m,n) \mp \sqrt{m^2 + n^2 - p - G^2(m,n)} \sin\alpha,$$

$$y = n - \sin\alpha\, G(m,n) \pm \sqrt{m^2 + n^2 - p - G^2(m,n)} \cos\alpha.$$

§ 49. Potenz eines Punktes. Legt man durch den Punkt $x_0 y_0$ den Strahlenbüschel $x = x_0 + s\cos\varphi$, $y = y_0 + s\sin\varphi$, dessen Parameter φ ist, so erhält man für die Schnittpunkte eines Strahles des Büschels mit dem Kreise

$$K = x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0$$

die Gleichung

$$s^2 - 2s((m - x_0)\cos\varphi + (n - y_0)\sin\varphi)$$
$$+ x^2_0 + y^2_0 - 2mx_0 - 2ny_0 + p = 0.$$

Die Strecken $s's''$ von $x_0 y_0$ bis zu den Schnittpunkten mit K sind die beiden Wurzeln dieser Gleichung. Die analytische Geometrie betrachtet es nicht als einen wesentlichen Unterschied ob diese Strecken imaginär sind oder reell. Die Summe und das Produkt der Strecken $s's''$ sind stets reell, wenn $x_0 y_0$ und wenn mnp reell sind, was immer vorausgesetzt wird.

Das Produkt dieser beiden Strecken, die Größe

$$s's'' = x^2_0 + y^2_0 - 2mx_0 - 2ny_0 + p = K^{(0)}$$

ist unabhängig von φ und heißt die Potenz des Punktes $x_0 y_0$ in bezug auf den Kreis K. Man erhält sie, wenn man die Koordinaten des Punktes $x_0 y_0$ in die Hauptgleichung des Kreises einsetzt, und kann sie daher passend mit $K^{(0)}$ bezeichnen, wenn $K = 0$ die Hauptgleichung ist. — Die Potenz des Koordinatenanfangs ist p, damit gewinnt diese Größe, die dritte Kreiskoordinate, ihre geometrische Interpretation. — Die Potenz eines Punktes ist für einen Kreis Null, wenn der Punkt auf der Kreislinie liegt. Ist sie positiv, so gibt es von dem Punkte reelle Tangenten an den Kreis K (wenn dieser nicht selbst imaginär ist), und die Potenz ist das Quadrat der Länge einer Tangente; der mit ihr als Radius um den Punkt, dessen Potenz

ihr Quadrat ist, geschlagene Kreis trifft den Kreis K rechtwinklig. Ist die Potenz des Punktes $x_0 y_0$ negativ, so gibt es keine reellen Tangenten von ihm an den Kreis, der Punkt liegt innerhalb des Kreises. Die Potenz ist dann der vierte Teil des Quadrates der kleinsten durch ihn gehenden Sehne negativ genommen. Ein Kreis, den man um $x_0 y_0$ mit der Hälfte der kleinsten Sehne als Radius schlägt, wird von K in diametralen Punkten getroffen.

§ 50. Geometrische Bedeutung der Polare. Die Strecke σ der Geraden $x = x_0 + s \cos \varphi$, $y = y_0 + s \sin \varphi$ bis zur Polare des Punktes $x_0 y_0$ wird aus der Gleichung gefunden

$$K^{(0)} + \sigma((x_0 - m) \cos \varphi + (y_0 - n) \sin \varphi) = 0,$$

wo $K^{(0)} = x^2_0 + y^2_0 - 2mx_0 - 2ny_0 + p$ ist. Die Strecken $s's''$ von demselben Punkt bis zum Kreis genügen nach dem vorigen Paragraphen den Gleichungen $s's'' = K^{(0)}$,

$$s' + s'' = 2(m - x_0) \cos \varphi + 2(n - y_0) \sin \varphi,$$

woraus folgt

$$\sigma(s' + s'') = 2s's''.$$

Nach § 21 sind die Punkte $s = 0$, $s = s'$, $s = \sigma$, $s = s''$ vier harmonische Punkte, gleichgültig ob $s's''$ reell oder konjugiert imaginär sind. Die Polare des Punktes $x_0 y_0$ ist diejenige Gerade, deren Punkte durch den Kreis von $x_0 y_0$ harmonisch getrennt sind. Liegt $x_0 y_0$ außerhalb des Kreises, so bestimmen die Schnittpunkte der Polare auf dem Kreise die Berührungspunkte der Tangenten von $x_0 y_0$ an den Kreis. — Zieht man von $x_0 y_0$ an den Kreis zwei Sekanten, so ist $x_0 y_0$ eine Nebenecke des aus den Schnittpunkten gebildeten Vierecks, die beiden anderen Nebenecken bestimmen die Polare, womit diese konstruiert ist. Liegt $x_0 y_0$ außerhalb, so geben die Verbindungslinien des Punktes mit den Schnittpunkten der Polare und des Kreises die Tangenten, womit auch diese konstruiert sind.

§ 51. Der Kreisbündel. Die Bedingung dafür, daß ein Kreis K mit den Koordinaten mnp einen andern Q mit den

Koordinaten $m_q n_q p_q$ rechtwinklig schneide, ist die, daß das Quadrat der Zentrale gleich der Summe der Quadrate der Radien ist, woraus die Gleichung fließt

$$m m_q + n n_q - \tfrac{1}{2}(p + p_q) = 0.$$

Ist umgekehrt eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit, ein Bündel von Kreisen gegeben, deren Koordinaten $m n p$ die Gleichung $Am + Bn + Cp + D = 0$ befriedigen, die, wenn C nicht Null ist, auf die Form

$$\left(-\frac{A}{2C}\right) m + \left(-\frac{B}{2C}\right) n - \tfrac{1}{2}\left(p + \frac{D}{C}\right) = 0$$

gebracht werden kann, so enthält dieser Bündel alle Kreise, die den Kreis Q mit den Koordinaten $m_q = -A:2C$, $n_q = -B:2C$, $p_q = D:C$, den wir den Orthogonalkreis des Bündels nennen, rechtwinklig schneiden. Das Quadrat des Radius des Orthogonalkreises

$$q = (A^2 + B^2 - 4CD) : 4C^2$$

heißt die Bündelpotenz, der Orthogonalkreis ist imaginär oder unsichtbar, wenn die Bündelpotenz negativ ist. Der jedesmal reelle Punkt $x = m_q = -A:2C$, $y = n_q = -B:2C$ heißt der Potenzpunkt des Bündels, seine Potenz ist dieselbe für jeden Kreis des Bündels, nämlich gleich

$$m_q{}^2 + n_q{}^2 - 2 m m_q - 2 n n_q + p = m_q{}^2 + n_q{}^2 - p_q =$$
$$= (A^2 + B^2 - 4CD) : 4C^2 = q.$$

Der Orthogonalkreis ist, den Fall $q = 0$ etwa ausgenommen, kein Kreis des Bündels, wohl aber ist jeder Punkt desselben als Punktkreis (Kreis mit dem Radius Null) ein Kreis des Bündels. Die Koordinaten eines solchen Punktkreises sind

$$m = \sqrt{q} \cos t - (A:2C), \quad n = \sqrt{q} \sin t - (B:2C),$$

$$p = m^2 + n^2 = \frac{A^2 + B^2}{2CC} - \frac{D}{C} - \frac{\sqrt{q}\,A}{C} \cos t - \frac{\sqrt{q}\,B}{C} \sin t,$$

sie erfüllen die Bündelgleichung. Die Punktkreise sind imaginär, wenn q negativ ist.

Setzt man in der Gleichung $K = x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0$, $m = \omega\mu$, $n = \omega\nu$, $p = \omega\pi$ und läßt ω über alle Grenzen wachsen, so geht der Kreis K in die Gerade $2\mu x + 2\nu y - \pi = 0$ über. Damit sie ein Kreis des Bündels sei, muß $\mu m_0 + \nu n_0 - \frac{1}{2}\pi = 0$ sein, d. h. die Gleichung der Geraden muß durch die Koordinaten des Kreismittelpunktes befriedigt werden, woraus folgt, daß alle Durchmesser des Orthogonalkreises zu den Individuen des Bündels gehören. Ist $q = 0$, so besteht der Bündel aus allen durch den Potenzpunkt gehenden Kreisen und Geraden.

Das Quadrat des Radius irgend eines Bündelkreises ist

$$m^2 + n^2 - p = m^2 + n^2 - p - 2mm_q - 2nn_q + p + p_q = \\ = (m - m_q)^2 + (n - n_q)^2 - q.$$

Ist q negativ, so gibt es einen kleinsten Kreis, dessen Mittelpunkt und Radius die Größen sind

$$m_q,\ n_q,\ \sqrt{-q},$$

dessen Mittelpunkt also der Potenzpunkt ist.

§ 52. Soll der Kreis K mit den Koordinaten mnp einen Kreis D mit dem Halbmesser d und den Koordinaten $m_d n_d p_d$ diametral schneiden, so muß die Gerade $K - D = 0$, die die Schnittpunkte der beiden Kreise enthält, durch $m_d n_d$ gehen, es muß also

$$K(m_d, n_d) - D(m_d, n_d) = -2mm_d - 2nn_d + 2m_d^2 + 2n_d^2 + p - p_d = 0,$$

oder es muß sein

$$mm_d + nn_d - \tfrac{1}{2}(p + p_d + 2d^2) = 0.$$

Dies ist die Gleichung eines Bündels in Kreiskoordinaten, dessen Orthogonalkreis den Mittelpunkt, (den Potenzpunkt) $m_q = m_d$, $n_q = n_d$ hat, während $p_q = p_d + 2d^2$ ist. Sein Radius ist

$$\sqrt{q} = \sqrt{m_d^2 + n_d^2 - p_d - 2d^2} = \sqrt{-1}\,d = id.$$

Die Kreise bilden also einen Bündel mit imaginärem Orthogonalkreis. Der Kreis D und seine Durchmesser gehören zum Bündel.

Ist die Potenz eines Bündels negativ, so liegt der Potenzpunkt im Innern jedes seiner Kreise und ist der Mittelpunkt des kleinsten Kreises. Jeder andere Kreis des Bündels muß diesen reell und zwar diametral schneiden, denn nur so ist die Potenz eines Kreises das negative Quadrat des kleinsten Kreises. Dieser ist Diametralkreis.

Durch Potenzpunkt und Potenz ist ein Bündel völlig bestimmt.

In einem Orthogonalbündel ist der Diametralkreis, in einem Diametralbündel der Orthogonalkreis imaginär, ihre Mittelpunkte fallen zusammen.

In einem Diametralbündel schneidet jeder Kreis jeden anderen reell.

Vom geometrischen Standpunkte aus sind die Bündel in drei Klassen zu teilen, in solche mit positiver Potenz, in ihnen gibt es unendlich viele Punktkreise, die einen Kreis, den Orthogonalkreis des Bündels ausfüllen, in solche mit negativer Potenz, in denen ein kleinster Kreis vorhanden ist, der von allen Kreisen des Bündels diametral getroffen wird, endlich in Nullbündel, deren Potenz Null ist, die alle Kreise enthalten, die durch ein und denselben Punkt hindurch gehen, der zugleich Orthogonal- und Diametralkreis ist. — Hierzu kommen aber noch:

§ 53. Bündel ohne eigentlichen Potenzpunkt. Ist in der allgemeinen Bündelgleichung $C = 0$, so gewinnt sie die Form $Am + Bn + D = 0$, aus der folgt, daß die Mittelpunkte aller Kreise dieses Bündels auf der Geraden $Ax + By + D = 0$ liegen, und umgekehrt, alle Kreise, deren Mittelpunkte auf dieser Geraden liegen, die also die Gerade senkrecht schneiden, gehören zum Bündel, ebenso die Punkte der Geraden als Punktkreise, und die Geraden, die auf jener senkrecht stehen. Der Orthogonalkreis ist in eine Gerade ausgeartet. Der Potenzpunkt ist ein unendlich ferner oder uneigentlicher.

Die symbolische Gleichung $D = 0$ bedeutet in Kreiskoordinaten alle Geraden der Systemebene.

§ 54. Durch drei Kreise ist ein Bündel im allgemeinen bestimmt. Die Bündelgleichung enthält drei wesentliche Konstanten, deshalb kann man immer einen Bündel angeben, der drei gegebene Kreise enthält, in speziellen Fällen gibt es unendlich viele solcher Bündel. — Die drei Kreise, deren Gleichungen in der Hauptform angenommen werden, seien $K_1 K_2 K_3$. Dann ist $K_2 - K_1 = P_{21} = 0$ die Gleichung einer Geraden, in der jeder Punkt für K_1 und K_2 dieselbe Potenz hat, die deshalb die Potenzlinie der Kreise $K_1 K_2$ heißt. Die Gerade $P_{32} = K_3 - K_2 = 0$ ist die Potenzlinie von $K_2 K_3$, und

$$K_1 - K_3 = P_{13} = 0$$

die der Kreise $K_3 K_1$. Da identisch $P_{21} + P_{32} + P_{13} = 0$ ist, so fließt daraus der wichtige Satz: *Die drei Potenzlinien je zweier von drei Kreisen schneiden sich in einem Punkte.* Es können aber zwei der Potenzlinien zusammenfallen. Ist etwa $P_{21} = C P_{32}$, so folgt daraus $K_2(1 + C) - K_1 = C K_3$, es ist also K_3 in der Form $A K_1 + B K_2$ enthalten, woraus weiter folgt, daß auch die Potenzlinie P_{13} mit P_{21} und P_{32} zusammenfällt.*) Die drei Kreise liegen dann in einem Büschel, welchen Begriff wir weiter unten behandeln, augenblicklich nehmen wir an, die drei Kreise $K_1 K_2 K_3$ seien voneinander linear unabhängig. Der Schnittpunkt von $P_{21} P_{32}$ gibt einen Punkt g_q, für den die drei Kreise dieselbe Potenz, etwa q haben. Der Kreisbündel, der g_q zum Potenzpunkt und q zur Potenz hat, enthält die drei Kreise $K_1 K_2 K_3$ und ist durch sie völlig bestimmt. Jeder Kreis K desselben läßt sich in der Form

$$(K_1 \lambda_1 + K_2 \lambda_2 + K_3 \lambda_3) : (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 0$$

darstellen, worin der Nenner $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ nur deshalb angeschrieben ist, damit sofort die Gleichung jedes Kreises des Bündels in der Hauptform erscheine, was auch durch die Annahme $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ erreicht werden kann. Da nämlich die

*) Dieser Satz erleidet eine Ausnahme, wenn einer der drei Kreise eine Gerade ist. Es fallen dann zwei Potenzlinien zusammen, von denen die dritte verschieden sein kann.

Potenz des Punktes g_q für $K_1 K_2 K_3$ dieselbe ist, so ist sie auch dieselbe für jeden Kreis von obiger Form. Die Mannigfaltigkeit ist eine zweifach unendliche, sie ist ein linearer Bündel, man kann deshalb die λ so bestimmen, daß der Kreis

$$\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \lambda_3 K_3 = 0$$

durch zwei Punkte des gegebenen Kreises K geht, und folglich, weil auch noch die Potenz für einen Punkt dieselbe ist, mit ihm zusammen fällt. Die Bündelpotenz ist negativ, wenn g_q im Innern einer der drei gegebenen und folglich im Innern aller liegt, sie ist also entweder das Quadrat der Tangente von g_q an einen der drei Kreise, oder der vierte Teil des Quadrats der kleinsten Sehne durch g_q in bezug auf einen der drei Kreise negativ genommen.

§ 55. Die Potenzlinie zweier Kreise. Es ergibt sich naturgemäß die Aufgabe, den Potenzpunkt dreier Kreise nicht bloß zu errechnen, sondern zu konstruieren. Dazu muß man die Potenzlinien von Kreispaaren konstruieren, deren Schnittpunkt der Potenzpunkt ist. Schneiden sich $K_1 K_2$ reell, so liegt die Lösung auf der Hand, weil die Gerade $K_2 - K_1 = 0$ die Verbindungslinie dieser Schnittpunkte ist. Aus $P_{21} = 0$, $K_1 = 0$ folgt, daß auch $K_2 = 0$ sein muß. Schneiden sich aber $K_1 K_2$ imaginär, so enthält die Potenzlinie zwar immer noch diese imaginären Schnittpunkte, sie ist eine gemeinsame (ideal schneidende) Sekante, aber ihre Konstruktion muß erst gefunden werden. Die Potenzlinie der Kreise $K_1 K_2$ hat die Gleichung

$$(m_1 - m_2)x + (n_1 - n_2)y - \tfrac{1}{2}(p_1 - p_2) = 0,$$

die Zentrale aber hat die Gleichung

$$x(n_1 - n_2) + y(m_2 - m_1) + m_1 n_2 - n_1 m_2 = 0,$$

woraus hervorgeht, daß die Potenzlinie senkrecht zur Zentrale ist. Zeichnen wir einen Kreis K_3 der K_1 und K_2 reell schneidet, so treffen sich die Potenzlinien $P_{23} P_{31}$ in einem Punkte von P_{21}, fällt man von ihm aus ein Lot auf die Zentrale, so hat man in ihm die Potenzlinie von $K_1 K_2$. Oder man konstruiere

ebenso mittels eines Kreises K_4 durch den Schnitt der Potenzlinien $P_{24} P_{41}$ einen zweiten Punkt von P_{21}.

Berühren sich $K_1 K_2$, so ist die gemeinsame Tangente im Berührungspunkte die Potenzlinie.

Die Potenz eines Punktes in bezug auf einen Punkt (Punktkreis) ist das Quadrat der Entfernung beider Punkte.

§ 56. Einige Konstruktionen. Die Aufgabe, einen Kreis zu zeichnen, der drei andere orthogonal oder diametral schneidet, ist sofort gelöst, denn der Potenzpunkt der drei Kreise ist sein Mittelpunkt. Liegt der Punkt außerhalb eines der drei Kreise (und folglich aller), so liefert die von ihm an einen der Kreise gezogene Tangente den Radius des Orthogonalkreises. Liegt er im Innern eines der Kreise (und folglich aller), so liefert die kleinste Sehne durch ihn an einen der Kreise, also die Sehne, die auf dem zugehörigen Durchmesser senkrecht steht, den Durchmesser des Diametralkreises. Sind ein oder zwei der Kreise gerade Linien, so muß der Mittelpunkt des gesuchten Kreises auf ihnen liegen, die Aufgabe vereinfacht sich. Sind alle drei Kreise gerade Linien, so löst die unendlich ferne Gerade in uneigentlicher Weise die Aufgabe. — Die Potenzlinie zweier Punkte (Punktkreise) steht auf deren Verbindungslinie in der Mitte senkrecht. — Die Potenzlinie eines Kreises und eines Punktes wird wie im vorigen Paragraphen gefunden. Die Kreise $K_3 K_4$ sind durch den Punkt zu zeichnen und die Tangenten dort sind die Potenzlinien. — Die Aufgaben, durch einen Punkt einen Kreis zu legen, der zwei Kreise orthogonal trifft, oder einen Kreis durch zwei Punkte zu legen, der einen Kreis rechtwinklig schneidet, sind nur spezielle Fälle der eben gelösten Aufgaben. Der Orthogonalkreis ist sicher reell, wenn einer der drei gegebenen Kreise ein Punkt ist.

§ 57. Der Kreisbüschel. Alle Kreise K, deren Gleichung in der Form enthalten ist $K = \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0$, haben dieselbe Potenzlinie. Nimmt man $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ an, was die Allgemeinheit nicht im mindesten beschränkt, so ist K in der Hauptform ge-

geben, wenn dies bei $K_1 K_2$ der Fall ist. Dann sieht man sofort, daß für alle Punkte, für die $K_1 = K_2$ ist, also für die Punkte der Potenzlinie, auch K denselben Wert hat. Die Mannigfaltigkeit ist einfach unendlich und wird deshalb als ein Büschel bezeichnet. Der Kreisbüschel enthält alle Kreise, die durch zwei feste reelle oder (konjugiert) imaginäre Punkte, die Schnittpunkte zweier seiner Kreise, etwa K_1 und K_2, hindurchgehen. Diese Punkte heißen die Grundpunkte des Büschels, sie können in einen zusammenfallen, wenn sich die Kreise berühren. Sind sie reell, so ist im Büschel ein kleinster Kreis vorhanden, sein Durchmesser ist die Verbindungslinie der Grundpunkte. Nur wenn die Kreise konzentrisch sind, ist keine eigentliche Potenzlinie vorhanden, sie fällt auf die unendlich ferne Gerade.

Zur analytischen Darstellung des Büschels kann man irgend zwei Kreise des Büschels verwenden. Ist einer derselben die Potenzlinie P, so ist der Büschel in der Form darzustellen

$$K_1 + \lambda P = 0,$$

wenn die Kreise in der Hauptform erscheinen sollen.

Die Mittelpunkte der Kreise $K_1 \lambda_1 + K_2 \lambda_2 = 0$ haben die Koordinaten

$$x = m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 \quad y = n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2$$

liegen also auf einer Geraden, der Zentrale des Büschels.

§ 58. Die Schnittpunkte der Kreise des Büschels mit der x-Achse werden durch die Gleichung gefunden

$$x^2 - 2[m_1 \lambda_1 + m_2 (1 - \lambda_1)]x + p_1 \lambda_1 + p_2 (1 - \lambda_1) = 0,$$

sie bilden daher (siehe S. 5) eine Involution. Da man jede Gerade zur x-Achse machen kann, so folgt daraus, daß die Kreise eines Büschels eine beliebige Gerade in einer Involution treffen, der unendlich ferne Punkt der Geraden und der durch die Potenzlinie bestimmte Punkt bilden ein Paar der Involution, die Doppelpunkte sind die Punkte, in denen die Gerade von Kreisen des Büschels berührt wird. Sie sind imaginär (vgl. § 20),

wenn die Gerade von irgend zwei Kreisen in getrennten Punkten getroffen wird.

Ist die Gerade Zentrale, und hat der Büschel imaginäre Grundpunkte, so sind die Doppelpunkte der Involution Grenzkreise des Büschels, die auch Grenzpunkte (Kreise mit dem Radius Null) genannt werden. Sie liegen zur Potenzlinie symmetrisch, weil sie den unendlich fernen Punkt der Zentrale von der Potenzlinie harmonisch trennen. — Ist der Büschel ein Berührungsbüschel, und geht die Gerade durch den Berührungspunkt, so ist die durch den Büschel auf ihr bestimmte Involution eine uneigentliche.

Die x-Achse ist Potenzlinie, wenn $m_1 = m_2$, $p_1 = p_2$ ist. Die Involutionsgleichung wird dann von λ_1 unabhängig. Der ausgesprochene Satz hat für die Potenzlinie keine Gültigkeit. Eine zweite Ausnahme bildet die unendlich ferne Gerade.

§ 59. Sind die Kreise eines Büschels nicht konzentrisch, so kann man die Potenzlinie zur y-Achse, die Zentrale zur x-Achse machen, und der Büschelgleichung die Form geben

$$K_\lambda = K + \lambda P = x^2 + y^2 - 2mx + p - 2\lambda x = 0$$

$(P = -2x)$. Der Radius des Kreises K_λ ist $k_\lambda = \sqrt{(m+\lambda)^2 - p}$. Ist er gegeben, so gibt es zwei zugehörige λ. Ersetzt man $m + \lambda$ durch λ, so vereinfacht sich die Gleichung noch mehr, es wird

$$K_\lambda = x^2 + y^2 - 2\lambda x + p = 0,$$

und λ ist die Abszisse des Mittelpunktes. Ist p negativ, so sind die Quadrate der Kreisradien $\lambda^2 - p$ sämtlich positiv, die Kreise sind sämtlich reell oder sichtbar. Der $\lambda = 0$ entsprechende ist der kleinste, er wird von allen andern diametral getroffen. Ist p positiv, so entsprechen den Mittelpunkten, deren Abszissen absolut genommen größer als $\sqrt{p}$ sind, sichtbare Kreise. Den beiden Werten $\lambda = \pm\sqrt{p}$ entsprechen Punktkreise, die Grenzkreise des Büschels. Liegt der Mittelpunkt λ zwischen $-\sqrt{p}$ und $\sqrt{p}$, so sind die zugehörigen Kreise unsichtbar (ihr Radius ist rein imaginär).

Die Mittelpunkte der Kreise des Büschels sind den Paaren der Involution, die die Kreise auf einer Geraden, z. B. auf der Zentrale selbst bilden, projektiv zugeordnet (vgl. § 5).

§ 60. Der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten $m_1 n_1$, $m_2 n_2$ in einem konstanten Verhältnisse $\sqrt{\lambda}$ zu einander stehen, ist ein Kreis, der die Gleichung besitzt:

$$(x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 - \lambda[(x - m_2)^2 + (y - n_2)^2] = 0.$$

Variiert man λ, so erhält man einen Kreisbüschel mit imaginären Doppelpunkten, dessen Grenzpunkte $m_1 n_1$ $(\lambda = 0)$ und $m_2 n_2$ $(\lambda = \infty)$ sind. Hier sind die beiden den Büschel definierenden Kreise die Grenzkreise des Büschels.

§ 61. Zwei Bündel bestimmen einen Büschel. Sind die beiden Bündel durch die Gleichungen

$$A_1 m + B_1 n + C_1 p + D_1 = 0, \quad A_2 m + B_2 n + C_2 p + D_2 = 0$$

gegeben, so werden durch diese Gleichungen, wenn sie nicht bloß durch einen Faktor verschieden sind, wenn sie verschiedenen Bündeln zukommen, zwei der Größen mnp linear durch die dritte bestimmt. Sind $m_1 n_1 p_1$, $m_2 n_2 p_2$ zwei Systeme der Zahlen mnp, die beide Gleichungen zugleich befriedigen, so werden sie auch durch die Zahlen

$$m = (m_1 + \lambda m_2) : (1 + \lambda), \quad n = (n_1 + \lambda n_2) : (1 + \lambda),$$
$$p = (p_1 + \lambda p_2) : (1 + \lambda)$$

befriedigt. Die beiden Bündeln gemeinsamen Kreise werden demnach durch die Gleichung gegeben

$$(x^2 + y^2)(1 + \lambda) - 2(m_1 + \lambda m_2)x - 2(n_1 + \lambda n_2)y + (p_1 + \lambda p_2) = 0.$$

Sie bedeutet die Kreise eines Büschels, dessen Parameter λ ist. Daraus folgt als spezieller Fall:

Alle Kreise, die zwei gegebene Kreise orthogonal schneiden, liegen in einem Büschel.

Alle Kreise, die einen Kreis orthogonal, einen andern diametral schneiden, liegen in einem Büschel.

Alle Kreise, die zwei Kreise diametral schneiden, liegen in einem Büschel. Die gegebenen Kreise können zu Punkten zusammenschrumpfen, und, wenn sie orthogonal geschnitten werden, zu geraden Linien ausarten.

Die Zentrale der gegebenen Kreise ist jedesmal die Potenzlinie des Büschels, denn sie trifft die beiden Kreise sowohl orthogonal als auch diametral, gehört also zum Büschel und ist seine Potenzlinie.

Die symbolische Gleichung $D = 0$ bedeutet alle Geraden der Systemebene, die also als ein Bündel in Anspruch zu nehmen sind.

Alle Geraden, die einen Kreis orthogonal oder diametral schneiden, also durch seinen Mittelpunkt gehen, einen linearen Strahlenbüschel bilden, sind als ein spezieller Kreisbüschel anzusehen.

§ 62. Der einem Büschel orthogonale Büschel. Die Tangenten von einem Punkte der Potenzlinie an alle Kreise des Büschels $(K_1 K_2)$ sind alle gleich lang, ihre Berührungspunkte liegen daher auf einem Kreise, der alle Individuen des Kreisbüschels rechtwinklig schneidet und durch die Grenzpunkte geht, wenn deren vorhanden sind. Variiert man den Mittelpunkt auf der Potenzlinie, so erhält man eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit K' von Kreisen, die die Kreise des Büschels $(K_1 K_2)$ senkrecht schneiden, sie bilden ihrerseits einen Büschel von Kreisen, der durch zwei Individuen, durch $(K'_1 K'_2)$ bezeichnet werden kann. Ist der Büschel $(K_1 K_2)$ durch die Gleichung gegeben

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + p_1 = 0,$$

worin λ der Büschelparameter und die y-Achse die Potenzlinie ist, und sind $m'n'p'$ die Koordinaten eines Kreises K', der senkrecht auf allen Kreisen des Büschels $(K_1 K_2)$ steht, so muß

$$\lambda m' + 0 n' - \tfrac{1}{2}(p_1 + p') = 0$$

für jedes λ sein, woraus folgt, daß $m' = 0$ $p' = -p_1$ sein muß. Setzt man λ' für n, so erhält man für einen solchen Kreis K' die Gleichung

$$x^2 + y^2 - p_1 - 2\lambda' y = 0.$$

Dies ist die Gleichung eines Büschels $(K'_1 K'_2)$, dessen Parameter λ' ist. Die Gleichungen eines Büschels und seines Orthogonalbüschels sind also

$$x^2 + y^2 + p_1 - 2\lambda x = 0 \quad x^2 + y^2 - p_1 - 2\lambda' y = 0.$$

Die Potenzlinie des einen Büschels ist die Zentrale des andern, und die Grundpunkte des einen sind die Grenzpunkte des andern. — Projiziert man das System der Längen- und Breitengrade der Erdkugel von einem Punkte des Äquators (stereographisch) in eine Ebene, die der Tangentialebene im Projektionszentrum parallel ist, so bildet sich das Gradnetz auf einen linearen Büschel und seinen orthogonalen ab. Die Grundpunkte bez. Grenzpunkte der Büschel sind die Bilder der Pole der Erdkugel.

Ein Kreis K_3 und ein Büschel $(K_1 K_2)$ bestimmen einen Bündel, die Individuen des Bündels haben die Gleichung

$$K = (K_1 \lambda_1 + K_2 \lambda_2 + K_3 \lambda_3) : (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 0,$$

zur Bestimmung des Potenzpunktes des Bündels kann man ein beliebiges Paar von Kreisen aus dem Büschel $(K_1 K_2)$ herausgreifen, sie bestimmen jedesmal mit K_3 denselben Potenzpunkt.

Aufgaben, die einen Kreis verlangen, der durch zwei Punkte geht und eine weitere Bedingung befriedigt, lassen sich dadurch vertiefen, daß man den gesuchten Kreis einem durch zwei Kreise, oder einen Kreis und eine Gerade gegebenen Büschel angehören läßt. Denn die letzte Forderung setzt nicht voraus, daß die beiden Punkte reell sind, sie können vielmehr konjugiert imaginär sein. Solche Aufgaben folgen jetzt. Ihre Lösungen beruhen darauf, daß jeder Kreis eines Büschels als ein Orthogonalkreis des Orthogonalbüschels angesehen werden kann.

§ 63. Konstruktionen. Man soll den Kreis zeichnen, der einem durch zwei Kreise (von denen einer die Potenzlinie

sein kann) gegebenen Büschel $(K_1 K_2)$ angehört, und durch einen gegebenen Punkt geht. Schneiden sich $K_1 K_2$ reell, so ist die Lösung trivial. Sind die Schnittpunkte imaginär, so zeichne man zuerst einen Kreis Q, der $K_1 K_2$ orthogonal schneidet. Ein solcher Kreis hat seinen Mittelpunkt auf der Potenzlinie, und die Tangente an einen der beiden Kreise zum Radius. Der Kreis nun, der Q und die Zentrale senkrecht trifft und durch den gegebenen Punkt geht, ist der gesuchte, er ist nach § 56 zu konstruieren. Man kann ihn auch als den Kreis finden, der durch den gegebenen, durch einen ihm in Beziehung auf die Zentrale symmetrisch liegenden Punkt geht, und Q rechtwinklig trifft. Es kann aber auch zu seiner Auffindung der Satz dienen, daß auf einer Geraden die Kreise des Büschels eine Involution bilden.

Man soll den Kreis zeichnen, der einen (natürlich auf der Zentrale) gegebenen Punkt zum Mittelpunkt hat. Hat der Büschel reelle Grundpunkte, so ist die Lösung trivial. — Schneiden sich aber die den Büschel bestimmenden Kreise $K_1 K_2$ nicht, so zeichne man einen ihnen orthogonalen Kreis, ziehe an ihn vom gegebenen Punkt eine Tangente, die Strecke bis zum Berührungspunkte ist der Radius des gesuchten Kreises. Liegt der gegebene Punkt zwischen den Grenzpunkten, so ist der Radius imaginär.

Aufgabe. Die Grenzkreise eines durch zwei Kreise gegebenen Büschels zu konstruieren. Man zeichne einen Orthogonalkreis. Er bestimmt durch seine Schnittpunkte auf der Zentrale die Grenzkreise, die zur Potenzlinie symmetrisch liegen. Sie sind imaginär, wenn die beiden Kreise sich reell schneiden.

Aufgabe. Die Doppelpunkte einer Punktinvolution zu konstruieren. Man zeichne über zwei Paaren der Involution als Durchmesser Kreise, die Grenzkreise des durch diese beiden Kreise bestimmten Büschels sind die gesuchten Punkte, die imaginär sind, wenn die Paare durcheinander getrennt sind, denn dann schneiden sich die beiden zu zeichnenden Kreise reell.

Aufgabe. Die Kreise eines Büschels zu zeichnen, die einen gegebenen Radius k haben. Sind die Grundpunkte des Büschels

reell, so ist die Lösung trivial, es wird aber die Lösung imaginär, wenn $2k$ kleiner ist als der Abstand der Grundpunkte. Sind aber die Grundpunkte imaginär, so ist die Potenz des Schnittpunktes g von Zentrale und Potenzlinie für die gesuchten Kreise eine gegebene Größe h^2, nämlich das Quadrat der Tangente an einen der gegebenen Kreise. Einer der gesuchten Kreise werde von der Zentrale in Punkten getroffen, die die Entfernung $s' s''$ von g haben, während die Entfernung des Mittelpunktes mit s bezeichnet werden mag, so ist

$$h^2 = s' s'' = (s - k)(s + k) = s^2 - k^2, \quad s = \pm \sqrt{h^2 + k^2}.$$

Der Mittelpunkt wird mittels des pythagoraeischen Lehrsatzes gefunden.

Aufgabe. Den Kreis des Büschels $K_1 K_2$ zu zeichnen, der einen Kreis K rechtwinklig schneidet. Man zeichne zu $K_1 K_2$ zwei Orthogonalkreise $K'_1 K'_2$ (einer davon darf die Zentrale sein) und konstruiere nach § 56 den Kreis, der $KK'_1 K'_2$ orthogonal schneidet, er ist der gesuchte. Er kann unsichtbar sein.

Aufgabe. Einen Kreis zu zeichnen, der einem Büschel $(K_1 K_2)$ angehört und einen Kreis K diametral schneidet. Die Verbindungslinie des Potenzpunktes des Bündels $(K_1 K_2 K)$ mit dem Mittelpunkt von K bestimmt auf K zwei Punkte des gesuchten Kreises. Denn zeichnet man den Kreis des Büschels $(K_1 K_2)$, der durch einen der Schnittpunkte geht, so enthält er auch den andern, der durch die Bündelpotenz bestimmt ist. Der gesuchte Kreis ist stets sichtbar.

Zieht man vom Potenzpunkte der Kreise $KK_1 K_2$ Tangenten an K, so bestimmen sie auf K die Berührungspunkte g, g' der beiden Kreise des Büschels $(K_1 K_2)$, die K berühren. Denn irgend zwei Kreise $K'_1 K'_2$ des Büschels $(K_1 K_2)$ bestimmen mit K denselben Potenzpunkt als $K_1 K_2$ und K, folglich muß auch die Potenzlinie eines K berührenden Kreises des Büschels, die gemeinsame Tangente dieses und des Kreises K, durch den Potenzpunkt gehen. — Damit ist die Aufgabe gelöst, die Kreise eines Büschels zu finden, die einen gegebenen Kreis berühren. Die Lösung ist imaginär, wenn der durch K und den Büschel

bestimmte Potenzpunkt im Innern von K liegt, die Bündelpotenz also negativ ist. — Die Verbindungslinien von g bezw. g' mit dem Mittelpunkte von K bestimmen auf der Zentrale K_1K_2 die Mittelpunkte der gesuchten Kreise. Denn die Zentrale eines Berührungskreises geht eben durch den Mittelpunkt von K.

Tritt für den Kreis K eine Gerade ein, so bestimmt der Büschel K_1K_2 auf ihr eine Involution, deren Doppelpunkte die Berührungspunkte sind.

§ 64. Zwei Bündel haben einen Büschel gemein, man soll zwei Kreise desselben finden. Die Verbindungslinie der Bündelpotenzpunkte ist die Potenzlinie desselben, es genügt deshalb ein weiterer Kreis. — Sind beide Bündel Orthogonalbündel, sind QQ' die Orthogonalkreise, so ist der gemeinsame Büschel der zu (QQ') orthogonale Büschel. Die Zentrale der Kreise QQ' ist die Potenzlinie desselben, ein weiterer Kreis wird mit schon bekannten Mitteln gefunden. Sind beide Bündel Diametralbündel, und sind D, D' ihre Diametralkreise, so ziehe man senkrecht zur Zentrale Durchmesser in ihnen. Ihre Endpunkte bilden ein Kreisviereck, und der durch sie bestimmte Kreis ist ein Kreis des gemeinsamen Büschels. Die Grundpunkte des Büschels sind in diesem Falle stets reell. — Ist der eine Bündel ein Orthogonalbündel, der andere ein Diametralbündel, so lege man nach § 56 durch zwei diametrale Punkte des Diametralkreises einen Kreis, der den Orthogonalkreis des Orthogonalbündels rechtwinklig schneidet, er ist ein Kreis des Büschels, dessen Grundpunkte reell sind.

Damit ist zugleich die Aufgabe erledigt, den Kreis zu zeichnen, den drei Bündel gemein haben, und also auch die Aufgabe, einen Kreis zu zeichnen, der drei Kreise diametral trifft.

Aufgabe. Die Potenzlinie zweier Kreise (mit reellen Koordinaten) zu zeichnen, von denen wenigstens einer imaginär ist. — Man betrachte die beiden Kreise als Orthogonalkreise zweier Bündel, dadurch können geometrisch unsichtbare Kreise gegeben werden, und bestimme den gemeinsamen Büschel. Die

Zentrale des ihm orthogonalen Büschels ist die Potenzlinie beider Kreise. — Schneidet insbesondere der reelle oder imaginäre Kreis K_1 (dessen Koordinaten reelle sind) den reellen Kreis K_2 rechtwinklig, so geht die Potenzlinie der beiden Kreise durch den Punkt ihrer Zentrale, der vom Mittelpunkt von K_1 durch den Kreis K_2 harmonisch getrennt ist. Dadurch ist die Potenzlinie bestimmt (sie ist die Polare jenes Mittelpunktes für K_2). Beweis: Der Koordinatenanfang sei der Mittelpunkt von K_1, die x-Achse sei die Zentrale. Die Bedingung der Rechtwinkligkeit der beiden Kreise erfordert $p_1 = - p_2$. Die Potenzlinie der Kreise

$$K_1 = x^2 + y^2 - p_2 = o, \quad K_2 = x^2 + y^2 - 2m_2 x + p_2 = o,$$

ist $m_2 x - p_2 = o$, ihr Schnittpunkt mit der x-Achse ist $x_2 = p_2 : m_2$. Die Schnittpunkte $x_1 x_3$ des Kreises K_2 mit der x-Achse sind

$$x_1 = m_2 - \sqrt{m_2^2 - p_2}, \quad x_3 = m_2 + \sqrt{m_2^2 - p_2}.$$

Es folgt $(x_1 + x_3)\, x_2 = 2 x_1 x_3$ und mithin sind (§ 21) $o x_1 x_2 x_3$ vier harmonische Punkte.

Zwei Büschel haben nicht notwendig einen Kreis gemein, wie sich im Raum zwei gerade Linien nicht zu schneiden brauchen. So haben z. B. ein Büschel und sein Orthogonalbüschel keinen Kreis gemein. Haben aber die Büschel eine gemeinsame Zentrale, so besitzen sie auch einen gemeinsamen Kreis, nämlich den, der die Zentrale und je einen Orthogonalkreis der beiden Büschel rechtwinklig schneidet. Natürlich kann dieser Kreis ein imaginärer mit reellen Koordinaten sein. Die Auffindung dieses Kreises gibt zugleich eine Lösung der Aufgabe, das gemeinsame Paar zweier Involutionen auf demselben Träger zu konstruieren. Ist eine der beiden Involutionen elliptisch, so ist das gemeinsame Paar sicher reell.

§ 65. Ähnlichkeitspunkte. Der Ähnlichkeit der Kegelschnitte widmen wir ein besonderes Kapitel. Deshalb soll hier auf das Wesen der Ähnlichkeitspunkte nicht eingegangen werden, sondern sie sollen hier nur formal definiert werden. Es

seien zwei Kreise $K_1 K_2$ gegeben. Die Zentrale hat die Gleichung

$$x(n_2 - n_1) + y(m_1 - m_2) + m_2 n_1 - m_1 n_2 = o.$$

Zieht man zwei parallele Radien, verbindet ihre Endpunkte, so trifft diese Gerade die Zentrale in einem Punkt xy, dessen Lage unabhängig von der Richtung der gezogenen Radien ist, weil die Strecken $(m_1 n_1, xy)$ $(m_2 n_2, xy)$ sich wie $k_1 : k_2$ verhalten. Ebenso verhalten sich die Streckenkoordinaten, es ist also

$$x - m_1 : x - m_2 = k_1 : k_2, \quad y - n_1 : y - n_2 = k_1 : k_2,$$

woraus folgt

$$x = \frac{m_1 k_2 - m_2 k_1}{k_2 - k_1}, \quad y = \frac{n_1 k_2 - n_2 k_1}{k_2 - k_1}.$$

Dieser Punkt heißt äußerer Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise Der äußere Ähnlichkeitspunkt braucht keineswegs außerhalb der beiden Kreise zu liegen, er liegt aber außerhalb der Strecke, die die beiden Mittelpunkte verbindet.

Zieht man die parallelen Radien in entgegengesetztem Sinne, so erhält man als Schnitt der Zentrale mit der Verbindungslinie der Endpunkte der Radien den Punkt

$$x = \frac{m_1 k_2 + m_2 k_1}{k_2 + k_1}, \quad y = \frac{n_1 k_2 + n_2 k_1}{k_2 + k_1},$$

er heißt der innere Ähnlichkeitspunkt. Gibt es von einem der Ähnlichkeitspunkte Tangenten an einen der Kreise, so sind sie zugleich Tangenten an den anderen Kreis. Damit ist die Aufgabe gelöst, die gemeinsamen Tangenten zweier Kreise zu zeichnen.

Der äußere Ähnlichkeitspunkt ist von dem inneren durch die Kreismittelpunkte harmonisch getrennt, wie aus der Konstruktion dieser Punkte folgt.

Sind drei Kreise $K_1 K_2 K_3$ gegeben, so mögen a_{12}, a_{23}, a_{31} die äußeren, i_{12}, i_{23}, i_{31} die inneren Ähnlichkeitspunkte bezw. von $K_1 K_2$, $K_2 K_3$, $K_3 K_1$ sein. Für sie besteht der Satz: Die Verbindungslinie irgend zweier Ähnlichkeitspunkte verschiedener Kreispaare, Ähnlichkeitsachse genannt, enthält noch einen dritten Ähnlichkeitspunkt. — Die Mittelpunkte $g_1 g_2 g_3$ der drei Kreise mögen in Linienkoordinaten die Gleichung haben

$$k_1 g_1 = m_1 u + n_1 v + 1 = 0, \quad k_2 g_2 = m_2 u + n_2 v + 1 = 0,$$
$$k_3 g_3 = m_3 u + n_3 v + 1 = 0,$$

wo $k_1 k_2 k_3$ die Radien der Kreise sind, so sind

$$g_1 - g_2 = 0, \quad g_2 - g_3 = 0, \quad g_3 - g_1 = 0$$

die Gleichungen der äußeren

$$g_1 + g_2 = 0, \quad g_2 + g_3 = 0, \quad g_3 + g_1 = 0$$

die Gleichungen der inneren Ähnlichkeitspunkte. Aus den Identitäten

$$(g_1 - g_2) + (g_2 - g_3) + (g_3 - g_1) = 0,$$
$$(g_2 - g_1) + (g_1 + g_3) - (g_2 + g_3) = 0$$

usw. folgt nach § 43 der zu erweisende Satz. Die sechs Ähnlichkeitspunkte liegen also viermal zu je dreien auf einer Geraden, sie sind die sechs Ecken eines Vierseits. Dieser Satz kann auch mit den Mitteln des § 36 erwiesen werden.

§ 66. Alle Kreise K, die einen Kreis K_1 berühren, liegen in einem Bündel zweiter Ordnung. Da die Zentrale zweier sich berührender Kreise gleich der Summe oder der Differenz der Radien sein muß, so ergibt sich die Gleichung

$$m m_1 + n n_1 - \tfrac{1}{2}(p + p_1) = \pm k_1 \sqrt{m^2 + n^2 - p},$$

wo das obere Zeichen der inneren, das untere Zeichen der äußeren Berührung entspricht. Durch Rationalisierung erhält man eine Gleichung zweiten Grades in mnp.

Alle Kreise, welche zwei Kreise $K_1 K_2$ gleichzeitig berühren, liegen in je zwei der Bündel zweiter Ordnung

$$m m_1 + n n_1 - \tfrac{1}{2}(p + p_1) = \pm k_1 \sqrt{m^2 + n^2 - p},$$
$$m m_2 + n n_2 - \tfrac{1}{2}(p + p_2) = \pm k_2 \sqrt{m^2 + n^2 - p}.$$

Es liegen deshalb alle Kreise, die die beiden Kreise $K_1 K_2$ berühren, in zwei linearen Bündeln. Denn die Elimination der Quadratwurzel ergibt:

$$m \frac{m_1 k_2 \mp m_2 k_1}{k_2 \mp k_1} + n \frac{n_1 k_2 \mp n_2 k_1}{k_2 \mp k_1} - \tfrac{1}{2}\left(p + \frac{p_1 k_2 \mp p_2 k_1}{k_2 \mp k_1}\right) = 0.$$

In dem dem oberen Zeichen entsprechenden Bündel liegen die Kreise, die $K_1 K_2$ gleichartig (beide von außen oder beide von innen) berühren, in dem dem unteren Zeichen entsprechenden Bündel liegen die Kreise, die $K_1 K_2$ ungleichartig berühren. Umgekehrt enthalten der lineare und einer der beiden quadratischen Bündel alle Kreise, die $K_1 K_2$ bezw. gleichartig oder ungleichartig berühren. Natürlich sind nicht umgekehrt alle Kreise des linearen Bündels Berührungskreise. Diese erfüllen vielmehr noch eine, und folglich beide der gegebenen Gleichungen zweiter Ordnung. Der Potenzpunkt des linearen Bündels ist der äußere Ähnlichkeitspunkt, wenn die Kreise $K_1 K_2$ gleichartig, der innere, wenn sie $K_1 K_2$ ungleichartig berühren. Da der Potenzpunkt jedes der linearen Bündel bekannt ist, so bedarf es nur noch je eines $K_1 K_2$ berührenden Kreises, um die linearen Bündel vollständig zu bestimmen. — Nimmt man einen Punkt der Potenzlinie zum Koordinatenanfang, so ist $p_1 = p_2$, und dieselbe Größe ist zugleich die Potenz des Koordinatenanfangs für den Orthogonalkreis des Bündels.

§ 67. Das Apollonische Problem. Es soll ein Kreis K gezeichnet werden, der drei Kreise $K_1 K_2 K_3$ berührt. Die gesuchten Kreise liegen nach dem vorigen Paragraphen in linearen Bündeln, die zwei Ähnlichkeitspunkte zu Potenzpunkten haben, also in einem Büschel, der eine Ähnlichkeitsachse zur Potenzlinie hat.

Nehmen wir den Potenzpunkt der Kreise $K_1 K_2 K_3$ zum Koordinatenanfang, so ist $p_1 = p_2 = p_3$. Die gesuchten Kreise liegen in einem Bündel zweiter Ordnung und in den linearen Bündeln

$$m \frac{m_1 k_2 \mp m_2 k_1}{k_2 \mp k_1} + n \frac{n_1 k_2 \mp n_2 k_1}{k_2 \mp k_1} - \tfrac{1}{2}(p + p_1) = o,$$
$$m \frac{m_2 k_3 \mp m_3 k_2}{k_3 \mp k_2} + n \frac{n_2 k_3 \mp n_3 k_2}{k_3 \mp k_2} - \tfrac{1}{2}(p + p_1) = o.$$

Der Büschel, den die irgend einer Vorzeichenkombination entsprechenden beiden linearen Bündel gemein haben, enthält den Orthogonalkreis Q der Kreise $K_1 K_2 K_3$, denn seine Koordinaten

$m = o$, $n = o$, $p = -p_1$ genügen den Gleichungen beider Bündel. Die Kreise, die der Apollonischen Aufgabe genügen, sind in vier Büscheln zu suchen, deren jedem der Orthogonalkreis von $K_1 K_2 K_3$ angehört und deren Potenzlinie je eine Ähnlichkeitsachse ist. Durch diese Data sind die Büschel vollständig bestimmt. In jedem Büschel liegen zwei Kreise, die einen der Kreise $K_1 K_2 K_3$ und folglich alle drei berühren, also gibt es acht Lösungen, von denen einige, ja die auch alle imaginär sein können.

Die Potenzlinie des Büschels ist die Verbindungslinie der Potenzpunkte der zugehörigen Bündel, also eine Ähnlichkeitsachse. Die Zentrale steht auf der Potenzlinie senkrecht, sie wird durch den Mittelpunkt eines Kreises des Büschels, also durch den von Q gegeben, sie ist die vom Mittelpunkte von Q auf die betreffende Ähnlichkeitsachse gezogene Senkrechte.

Nehmen wir den Fall gleichartiger Berührung, so haben wir die Kreise des Büschels zu suchen, deren Potenzlinie die durch die äußeren Ähnlichkeitspunkte gehende Ähnlichkeitsachse A ist und von dem Q ein Kreis ist. Die Mittelpunkte der gesuchten Kreise liegen auf dem Durchmesser G von Q, der auf A senkrecht steht. Die Berührungspunkte der Kreise dieses Büschels, die einen der drei Kreise des Büschels etwa K_2 berühren, findet man dadurch (§ 63), daß man von dem Potenzpunkt g der Kreise $Q K_2 A$ Tangenten an K_2 zieht. Der Punkt g liegt auf A und wird besonders leicht gefunden, wenn Q reell ist, weil dann die Potenzlinie von $Q K_2$ die Verbindungslinie der Schnittpunkte dieser Kreise ist, wenn aber Q imaginär ist, so ist die Potenzlinie $(K_2 Q)$ nach § 64 zu konstruieren. — Die Tangenten von g an K_2 mögen in UV berühren. Die Verbindungslinien der Punkte UV mit dem Mittelpunkte von K_2 treffen die Gerade G in den Mittelpunkten der gesuchten Kreise, womit diese gefunden sind.

Die Aufgabe, einen Kreis zu zeichnen, der K_1 unter dem Winkel α_1, K_2 unter dem Winkel α_2, K_3 unter dem Winkel α_3 schneidet, wird mit ähnlichen Hilfsmitteln gelöst.

§ 68. Die Möbiussche Kreisverwandtschaft. Legt man durch den Koordinatenanfang und den Punkt $\xi\eta$ eine Gerade, so trifft sie die Polare dieses Punktes in bezug auf den Einheitskreis, die Gerade

$$x\xi + y\eta - 1 = 0$$

in den Punkten

$$x = \xi : (\xi^2 + \eta^2), \quad y = \eta : (\xi^2 + \eta^2)$$

und dabei ist $(x^2 + y^2)(\xi^2 + \eta^2) = 1$, d. h. das Produkt der Abstände der Punkte $\xi\eta$ und xy vom Mittelpunkte des Einheitskreises ist Eins. Deshalb nennt man die Abbildung, die entsteht, wenn man dem Punkte $\xi\eta$ den Punkt xy zuordnet, Abbildung durch reziproke Radii vectores. Da folgt

$$\xi = x : (x^2 + y^2), \quad \eta = y : (x^2 + y^2),$$

so sieht man, daß in dieser Abbildung dem Punkte xy wieder der Punkt $\xi\eta$ entspricht, die Abbildung ist eine involutorische. Sie scheint auf den ersten Blick eine völlig ein-eindeutige zu sein. Sieht man aber genauer zu, so bemerkt man, daß dem Punkte $\xi = 0$, $\eta = 0$ jeder unendlich ferne entspricht, so daß dieser Punkt eine Ausnahme in bezug auf die Ein-eindeutigkeit macht. Es gibt noch zwei solche Ausnahmepunkte, die sogenannten absoluten Punkte, die später besprochen werden. Da sie nicht sichtbar sind, so macht sich ihre Besonderheit noch weniger bemerkbar, als die des Koordinatenanfangs. Wir gehen nicht weiter darauf ein.

§ 69. Der Name Kreisverwandtschaft. Daß jeder Punkt des Einheitskreises in dieser Verwandtschaft sich selbst entspricht, ist evident. Ebenso daß die Punkte einer Geraden durch den Mittelpunkt dieses Kreises Punkten auf derselben Geraden entsprechen. Will man aber das Bild eines Kreises kennen lernen, so muß man in der Gleichung desselben

$$D(x^2 + y^2) + 2Ax + 2By + C = 0$$

die Substitution $x = \xi : (\xi^2 + \eta^2)$, $y = \eta : (\xi^2 + \eta^2)$ machen. Da-

durch erhält man als Gleichung des Bildes

$$C(\xi^2 + \eta^2) + 2A\xi + 2B\eta + D = 0.$$

Das Bild ist demnach wieder ein Kreis, nur wenn der Originalkreis durch den Koordinatenanfang geht, wenn $C = 0$ ist, ist das Bild eine Gerade, ein Kreis mit unendlich fernem Mittelpunkt. Rechnet man die Geraden hier mit zu den Kreisen, so ergibt sich, daß jedem Kreise ein Kreis entspricht. Deshalb heißt die Verwandtschaft Kreisverwandtschaft. Sind mnp die Koordinaten des Originalkreises, so sind $m:p$, $n:p$, $1:p$ die Koordinaten des Bildkreises, und es ist im Kreissystem die Abbildung eine lineare, daher vollkommen ein-eindeutige. Mit diesen Bemerkungen müssen wir uns hier begnügen.*)

§ 70. Hieran schließen wir die Lösung einer hübschen Aufgabe. — Auf einer geraden Landstraße sind zwei Strecken ab abgesteckt, welches ist der Ort der Punkte, in denen diese Strecken dieselbe scheinbare Größe haben?

Es ist klar, daß die unendlich ferne Gerade und die Landstraße selbst einen Teil dieses Ortes bilden, denn in ihnen ist die scheinbare Größe beider Strecken Null. Der Ort der übrigen Punkte, der sich als ein Kreis ergeben wird, werde mit K bezeichnet.

Liegt die eine Strecke ganz in der anderen, so bilden die erwähnten Geraden allein den Ort gleicher scheinbarer Größe.

Es genügt also den Fall zu betrachten, in dem die Strecken ganz außereinander liegen, oder nur einen Teil miteinander gemein haben.

Machen wir die Straße zur x-Achse, und einen der äußersten Punkte zum Koordinatenanfang, so können wir diesen noch so

---

*) Man lese über Kreissysteme Steiners Untersuchungen in Crelles Journal Band I. Der Verfasser dieses hat selbst in Schlömilchs Zeitschrift, Jahrgang 29, Seite 284 einen Aufsatz über Kreissysteme veröffentlicht. Bei der Konstruktion der Potenzlinie ist auf Seite 290 ein Irrtum untergelaufen, später wird aber die richtige Konstruktion gegeben. Dort ist unter anderen die Aufgabe gelöst, ein Punktpaar zu finden, welches mit vier Punktpaaren je ein Kreisviereck bildet.

wählen, daß die an ihn stoßende Strecke a kleiner oder gleich b ist. Die drei anderen Punkte mögen die Abszissen $x_1 = a$, x_2, x_3 haben, so daß $x_3 - x_2 = b$ ist. Die drei Zahlen $x_1 x_2 x_3$ sind positiv und x_3 ist die größte unter ihnen, während x_1 größer oder kleiner als x_2 sein kann.

Ist $b = a$, so ist wegen der Symmetrie unmittelbar ersichtlich, daß die auf der x-Achse im Punkt $x = \frac{1}{2} x_3$ senkrechte Gerade der Ort K gleicher scheinbarer Größe ist.

§ 71. Ein Kreis K_λ durch die Endpunkte der Strecke a hat die Gleichung

$$K_\lambda = x^2 + y^2 - x_1 x - 2\lambda y = 0$$

und $\frac{1}{2} x_1$, λ sind die Koordinaten seines Mittelpunktes, und der Kreis

$$K_\mu = x^2 + y^2 - (x_2 + x_3) x - 2\mu y + x_2 x_3$$

geht durch die Endpunkte der Strecke b, seine Mittelpunktskoordinaten sind $\frac{1}{2}(x_2 + x_3)$, μ. Eine Tangente an K_λ im Punkte x_1 schließe mit der positiven x-Achse den Winkel φ ein, so ist dieser Winkel gleich dem halben Zentriwinkel in K_λ, also ist $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2} x_1 : \lambda$ und $\lambda = \frac{1}{2} x_1 \operatorname{ctg}\varphi$. Der Kreis

$$K_\varphi = x^2 + y^2 - x_1 x - x_1 \operatorname{ctg}\varphi\, y = 0$$

ist der Ort, in dem die Strecke a unter der scheinbaren Größe $\operatorname{arc}\varphi$ gesehen wird, wenigstens in seinem oberen Teile. Im unteren Teile ist $\operatorname{arc}(\pi - \varphi)$ die scheinbare Größe.

Der Kreis

$$K_\varphi' = x^2 + y^2 - (x_2 + x_3) x - (x_3 - x_2) \operatorname{ctg}\varphi\, y + x_2 x_3 = 0$$

ist in seinem oberen Teile der Ort, in dem b die scheinbare Größe $\operatorname{arc}\varphi$ hat.

Die Radien der beiden Kreise sind

$$k_\varphi = x_1 : 2 \sin\varphi, \quad k_\varphi' = (x_3 - x_2) : 2 \sin\varphi.$$

§ 72. Der Ort K gleicher scheinbarer Größe der Strecken ab ist die Gesamtheit der Schnittpunkte aller Kreise K_φ, K_φ',

wenn man φ laufen läßt. Man erhält ihn durch Elimination von $\operatorname{ctg}\varphi$ aus den Gleichungen der Kreise K_φ, K_φ'. Das Eliminationsresultat, die Resultante der Gleichungen $K_\varphi = 0$, $K_\varphi' = 0$, enthält den Faktor y, wie es sein muß, denn $y = 0$, die x-Achse, ist ja ein Teil unseres gesuchten Ortes. Unterdrückt man diesen Faktor, so erhält man als Resultante die Gleichung

$$K = (x^2 + y^2)(b - a) - x(x_1 b - (x_2 + x_3) a) - x_1 x_2 x_3 = 0,$$

oder

$$K = (x^2 + y^2)(b - x_1) + 2 x x_1 x_2 - x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Der Ort K gleicher scheinbarer Größe ist also ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Landstraße, auf der x-Achse, liegt und die Abszisse

$$\xi = \frac{\frac{1}{2} x_1 b - \frac{1}{2}(x_2 + x_3) a}{b - a} = \frac{\xi_1 b - \xi_2 a}{b - a}$$

hat, wenn $\xi_1 \xi_2$ bezw. die Abszissen der Mitten der Strecken ab sind. Dabei ist nach unserer Annahme $b - a$ positiv. Im Grenzfalle $b = a = x_1$ wird aus dem Ort K eine Gerade

$$2x - x_3 = 0, \quad x = \tfrac{1}{2} x_3,$$

die in der Mitte zwischen den äußersten Punkten auf der x-Achse senkrecht steht, wie wir schon wissen.

§ 73. Konstruktion des Mittelpunktes von K. Da $\xi = (\xi_1 b - \xi_2 a) : (b - a)$ ist, so folgt

$$\frac{\xi - \xi_1}{\xi - \xi_2} = \frac{a}{b}.$$

Es teilt also ξ die Strecke von ξ_1 bis ξ_2 so, daß sich $\xi - \xi_1$ zu $\xi - \xi_2$ wie a zu b verhält. Legt man durch ξ_1 eine beliebige von der x-Achse verschiedene Gerade und trägt auf ihr nach der einen Seite die Strecke $b - a$ ab, deren Endpunkt g_1 sein mag, von da rückwärts die Strecke b, oder was dasselbe ist von ξ_1 rückwärts die Strecke a, deren Endpunkt g_2 sein mag, verbindet g_1 mit ξ_2, und zieht dieser Verbindungslinie parallel durch g_2 eine Gerade, so trifft sie, wie aus der Ähnlichkeit der ent-

standenen Dreiecke folgt, die x-Achse im gesuchten Mittelpunkte ξ. Daß diese Abszisse negativ ist, wenn $a < b$ ist, ergibt sich nachher ohne Rechnung.

§ 74. Konstruktion des Radius k von K. Nehmen wir x_1 als veränderlich an, diesen Buchstaben durch ν ersetzend, so erhalten wir einen Büschel von Kreisen

$$K_\nu = (x^2 + y^2)\, b - \nu\, (x^2 + y^2 - 2xx_2 + x_2x_3).$$

Für $\nu = 0$ schrumpft der Kreis zu einem Punkt $x = 0$, $y = 0$ zusammen, einem Grenzpunkte des Büschels, und für $\nu = b$ wird daraus eine Gerade $x = \frac{1}{2}x_3$, die Potenzlinie des Büschels, der Punkt x_3, weil er zur Potenzlinie symmetrisch mit $x = 0$ liegt, ist der andere Grenzpunkt des Büschels. Läßt man $x_1 = \nu$ von 0 bis b wachsen, so erhält man die eine Hälfte aller Kreise dieses Büschels, ihre Mittelpunkte liegen, wenn die x-Achse horizontal vor uns liegt, links von $x = 0$, ihre rechten Schnittpunkte links von $\frac{1}{2}x_3$.

Es kommt also darauf an, den Radius des Kreises des Büschels K_ν zu konstruieren, der den gegebenen Mittelpunkt ξ hat.

Der Kreis, der die Strecke von 0 bis x_3, die Strecke zwischen den beiden Grenzpunkten, zum Durchmesser hat, ist ein Orthogonalkreis des Büschels. Die von ξ an ihn gezogene Tangente (§ 63) von ξ bis zum Berührungspunkte ist der Radius k von K.

§ 75. Lage des Kreises K in bezug auf die Strecken a, b. Liegen die Strecken ganz außereinander, ist $x_1 < x_2$, so schließt K die Strecke a ein, die Strecke b aus. Daß der linke Schnittpunkt von K mit der x-Achse links von a liegt, ist nach dem Erörterten selbstverständlich, da schon der Mittelpunkt links von a liegt. Der rechte Schnittpunkt rückt kontinuierlich von links nach rechts vor, wenn $x_1 = \nu$ von 0 bis x_2 wächst, in dieser Grenzlage ist aber der Schnittpunkt x_2 selbst, wie die Gleichung für K in diesem Falle

$$(x^2 + y^2)(x_3 - 2x_2) + 2xx_2x^2 - x_2^2x_3 = 0$$

lehrt. Der rechte Schnittpunkt liegt also links von x_2, K schließt

die Strecke b aus. Dieser Schnittpunkt muß aber rechts von x_1 liegen, wie die Natur des Problems selbst lehrt. Denn schnitte K die Strecke a, so würde in unmittelbarer Nähe der x-Achse auf K die scheinbare Größe von a gleich π, die von b gleich 0 sein, die scheinbaren Größen wären nicht gleich. K schließt a ein.

Ist $x_1 > x_2$, so geht K zwischen diesen beiden Punkten durch, trifft also beide Strecken. In der Nähe der Schnittstelle ist die scheinbare Größe beider Strecken nahe π.

§ 76. Welches ist das Maximum der scheinbaren Größe. Bei der Beantwortung dieser Frage kann man sich auf den Fall $x_1 < x_2$ beschränken, weil im anderen Falle die Schnittstelle von K mit der x-Achse zwischen diesen Punkten das Maximum gleich π ergibt.

Die Kreise K_φ und K_φ' schneiden sich zweimal. In den beiden Schnittpunkten ist die scheinbare Größe jeder Strecke dieselbe, und muß, weil sie in den Schnittpunkten mit der x-Achse 0 ist, für den Wert von φ ein Maximum haben, für das K_φ und K_φ' und also auch K sich berühren. Die Bedingung für dieses Berühren, da die Berührung nur eine äußere sein kann, ist nach § 66

$$\tfrac{1}{4} x_1 (x_2 + x_3) + \tfrac{1}{4} x_1 (x_3 - x_2) \operatorname{ctg}^2 \varphi - \tfrac{1}{2} x_2 x_3$$
$$= - k_\varphi k_\varphi' = - \frac{x_1 (x_3 - x_2)}{4 \sin^2 \varphi}$$

oder, wenn man $\operatorname{ctg}^2 \varphi$ durch $(1 : \sin^2 \varphi) - 1$ ersetzt

$$- \frac{x_1 (x_3 - x_2)}{2 \sin^2 \varphi} = \tfrac{1}{2} x_2 (x_1 - x_3), \quad \sin^2 \varphi = \frac{x_1}{x_2} \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}.$$

Da φ den Wert $\tfrac{1}{2}\pi$ nicht erreichen kann, so ist der spitze Winkel, den diese Gleichung ergibt, das Maximum. — Für $a = b$, $x_3 - x_2 = x_1$ erhält man

$$\sin \varphi = x_1 : x_2.$$

Der Punkt, in dem das Maximum statthat, läßt sich leicht konstruieren. Der Punkt der Linie $K_\varphi - K_\varphi' = 0$,

$$y = 0, \quad x = x_2 x_3 : (x_3 + x_2 - x_1)$$

ist Potenzpunkt der Kreise K, K_φ, K_φ'. Jede Gerade durch ihn trifft K in zwei Punkten, für die die scheinbare Größe jeder der Strecken a, b dieselbe ist. Die von ihm an K gezogene Tangente bestimmt demnach den Punkt der größten scheinbaren Größe.

§ 77. Da die Gleichung des Kreises K ungeändert bleibt, wenn man x_1 und x_2 miteinander vertauscht, so ergibt sich noch der Satz:

Der Ort der gleichen scheinbaren Größe der Strecken ox_1, x_2x_3 ist derselbe als der der Strecken ox_2, x_1x_3, was auch leicht ohne Rechnung einzusehen ist.

§ 78. Anhang. Das Malfattische Problem. Dieses Problem wird mit Methoden der elementaren Geometrie gelöst, weshalb ich seine Beifügung als Anhang bezeichne. Das Malfattische Problem fordert, drei Kreise zu zeichnen, die sich gegenseitig berühren und zugleich je zwei Seiten eines gegebenen Dreiecks. Hier soll nur der Fall betrachtet werden, in dem die Kreise im Inneren des Dreiecks liegen.

Die Seiten des Dreiecks mögen die Längen $s_1 s_2 s_3$ haben, der Umfang sei $2s$. Die $s_1 s_2 s_3$ bezw. gegenüberliegenden Winkel seien $2\alpha_1 2\alpha_2 2\alpha_3$, so daß $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{1}{2}\pi$ ist. Die Radien der bezw. $s_2 s_3$, $s_3 s_1$, $s_1 s_2$ berührenden Kreise seien $k_1 k_2 k_3$, ihre Mittelpunkte liegen auf den Winkelhalbierenden, deren Längen von den Ecken bis zu ihrem gemeinsamen Schnitt mit $h_1 h_2 h_3$ bezeichnet werden mögen. Die Berührungspunkte der gesuchten Kreise mögen von den ihnen zugehörenden Ecken bezw. die Entfernungen

$$x_1 = \lambda_1{}^2 = s\sin^2\omega_1, \quad x_2 = \lambda_2{}^2 = s\sin^2\omega_2, \quad x_3 = \lambda_3{}^2 = s\sin^2\omega_3$$

haben, wo die λ und ω die Bedeutung für die Rechnung bequemer Hilfsgrößen haben. Zwischen den k, x, λ, α bestehen die Gleichungen

$$k_1 = \lambda_1{}^2 \operatorname{tg}\alpha_1 = x_1 \operatorname{tg}\alpha_1, \quad k_2 = \lambda_2{}^2 \operatorname{tg}\alpha_2, \quad k_3 = \lambda_3{}^2 \operatorname{tg}\alpha_3.$$

Nun geben wir einigen sehr bekannten elementaren Formeln

der Trigonometrie Raum, um bei dem eigentlichen Problem leichter auf sie verweisen zu können. Es ist

(A) $$\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2 + \sin 3\alpha_3 = 4\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3,$$

(B) $$\operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_3 + \operatorname{tg}\alpha_3 \operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 = 1.$$

Setzen wir zur Abkürzung

(C) $$\operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_3 = A_1{}^2 = 1 - B_1{}^2, \quad \operatorname{tg}\alpha_3 \operatorname{tg}\alpha_2 = A_2{}^2 = 1 - B_2{}^2,$$
$$\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 = A_3{}^2 = 1 - B_3{}^2,$$

und

$$A_1 = \cos\gamma_1, \quad A_2 = \cos\gamma_2, \quad A_3 = \cos\gamma_3,$$

so können wir (B) in die Form setzen

(D) $$A_1{}^2 + A_2{}^2 + A_3{}^2 = \cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_3 = 1.$$

Aus den Dreiecksformeln

(E) $$\sin\alpha_1 = \sqrt{\frac{s-s_2}{s_2}\frac{s-s_3}{s_3}}, \quad \operatorname{tg}\alpha_1 = \sqrt{\frac{s-s_2}{s}\frac{s-s_3}{s-s_1}}$$

und ihren zyklischen Vertauschungen folgen die Formeln

(F) $$A_1 = \cos\gamma_1 = \sqrt{\frac{s-s_1}{s}}, \quad B_1 = \sin\gamma_1 = \sqrt{\frac{s_1}{s}}, \quad s_1 = sB_1{}^2$$

und deren zyklische Vertauschungen.

Der dem Dreieck eingeschriebene Kreis berührt die Seite s_3 an einer Stelle, die von der Ecke $s_2 s_3$ um die Strecke $s - s_1$ entfernt ist. Der Radius r dieses Kreises hat die Größe

(G) $$r = \sqrt{\frac{\overline{s-s_1}\cdot\overline{s-s_2}\cdot\overline{s-s_3}}{s}} = sA_1A_2A_3 = s\cos\gamma_1 \cos\gamma_2 \cos\gamma_3.$$

Für die Winkelhalbierenden ergibt sich

$$\frac{h_1}{r} = \frac{1}{\sin\alpha_1} = \sqrt{\frac{s_2}{s-s_1}\frac{s_3}{s-s_3}}, \quad h_1 = \sqrt{\frac{\overline{s-s_1}\cdot s_2 \cdot s_3}{s}},$$

(H) $$h_1 = s\cos\gamma_1 \sin\gamma_2 \sin\gamma_3, \quad h_2 = s\sin\gamma_1 \cos\gamma_2 \sin\gamma_3,$$
$$h_3 = s\sin\gamma_1 \sin\gamma_2 \cos\gamma_3.$$

Nun gehen wir an die Lösung des Problems.

Der Pythagoräische Lehrsatz liefert die Gleichungen

$$(s_3 - x_1 - x_2)^2 + (k_2 - k_1)^2 = (k_2 + k_1)^2.$$
$$(s_3 - \lambda_1{}^2 - \lambda_2{}^2)^2 = 4 k_1 k_2 = 4 \lambda_1{}^2 \lambda_2{}^2 A_3{}^2.$$

Nimmt man die (positive) Quadratwurzel und wendet noch zyklische Vertauschung an, so gelangt man zu dem Gleichungssystem

$$\text{(I)} \quad s_1 = \lambda_2{}^2 + \lambda_3{}^2 + 2 \lambda_2 \lambda_3 A_1, \quad s_2 = \lambda_3{}^2 + \lambda_1{}^2 + 2 \lambda_3 \lambda_1 A_2,$$
$$s_3 = \lambda_1{}^2 + \lambda_2{}^2 + 2 \lambda_1 \lambda_2 A_3,$$

aus denen $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ zu bestimmen sind. (Betrachtet man $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ als Cartesianische Raumkoordinaten, so kommt die Aufgabe mit der überein, die Schnittpunkte dreier Zylinder, die einen Mittelpunkt gemein haben, aufzufinden.)

Die beiden letzten Gleichungen unter (I) schreiben wir, s_μ durch $s B_\mu{}^2$ ersetzend, in die Form

$$\text{(II)} \qquad B_2{}^2 (\lambda_1{}^2 - s) + (\lambda_3 + A_2 \lambda_1)^2 + * = 0,$$
$$B_3{}^2 (\lambda_1{}^2 - s) + * + (\lambda_2 + A_3 \lambda_1)^2 = 0.$$

Das sind zwei lineare Gleichungen zwischen den drei Größen

$$\lambda_1{}^2 - s, \quad (\lambda_3 + A_2 \lambda_1)^2, \quad (\lambda_2 + A_3 \lambda_1)^2,$$

deren Lösung in der Proportion gegeben wird

$$s - \lambda_1{}^2 : (\lambda_3 + \lambda_1 A_2)^2 : (\lambda_2 + \lambda_1 A_3)^2 = 1 : B_2{}^2 : B_3{}^2.$$

Nimmt man die positiven Quadratwurzeln, so findet man $B_2 \sqrt{s - \lambda_1{}^2} = \lambda_3 + \lambda_1 A_2$ oder

$$\text{(III)} \quad \lambda_3 = - A_2 \lambda_1 + B_2 \sqrt{s - \lambda_1{}^2}, \; \lambda_2 = - A_3 \lambda_1 + B_3 \sqrt{s - \lambda_1{}^2}.$$

Setzt man diese Werte in die unter (I) für s_1 enthaltene Gleichung ein, so erhält man in sehr einfacher Weise eine Gleichung zweiten Grades für $\lambda_1{}^2 = x_1$. Weniger einfach aber ist die geometrische Deutung der so erhaltenen Lösung des Problems. Die Sache vereinfacht sich außerordentlich, wenn man die oben erwähnten Substitutionen $\lambda_1 = \sqrt{s} \sin \omega_1$, $A_1 = \cos \gamma_1$ usw. macht. Dadurch wird aus den Gleichungen (III)

$$\sin \omega_3 = \sin (\gamma_2 - \omega_1), \quad \sin \omega_2 = \sin (\gamma_3 - \omega_1).$$

Da bei der unserem Problem gegebenen Beschränkung die Winkel $\omega_1 \omega_2 \omega_3 \ \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ spitze sein müssen, so folgt $\omega_3 = \gamma_2 - \omega_1$ oder mit zyklischer Vertauschung

$$\text{(IV)} \qquad \omega_2 + \omega_3 = \gamma_1, \quad \omega_3 + \omega_1 = \gamma_2, \quad \omega_1 + \omega_2 = \gamma_3,$$
$$\omega_1 = \tfrac{1}{2}(\gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_1), \quad \omega_2 = \tfrac{1}{2}(\gamma_3 + \gamma_1 - \gamma_2),$$
$$\omega_3 = \tfrac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3).$$

Mithin ist

$$x_1 = \lambda_1{}^2 = s \sin^2 \omega_1 = \tfrac{1}{2} s (1 - \cos 2\omega_1) = \tfrac{1}{2} s (1 - \cos \overline{\gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_1})$$
$$= \tfrac{1}{2} s (1 - \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 \cos\gamma_3 + \cos\gamma_1 \sin\gamma_2 \sin\gamma_3$$
$$- \sin\gamma_1 \cos\gamma_2 \sin\gamma_3 - \sin\gamma_1 \sin\gamma_2 \cos\gamma_3),$$

und mit Rücksicht auf (H) und (G)

$$\text{(V)} \qquad x_1 = \frac{s - r + h_1 - h_2 - h_3}{2}, \quad x_2 = \frac{s - r - h_1 + h_2 - h_3}{2},$$
$$x_3 = \frac{s - r - h_1 - h_2 + h_3}{2}.$$

Die Konstruktion der Berührungspunkte der gesuchten Kreise ist jetzt so einfach, daß die Steinersche Konstruktion eher als eine Komplikation als eine Vereinfachung anzusehen ist.

Im 76sten Bande des Crelleschen Journals löst Herr Mertens die Malfattische Aufgabe für das sphärische Dreieck in analoger Weise.

Einiges über Determinanten zweiter und dritter Ordnung.

Wer sich mit der Geometrie tiefer beschäftigen will, kann des Instrumentes der Determinanten nicht entbehren. Es ist deshalb dringend zu empfehlen, die Theorie der Determinanten sich zu eigen zu machen, etwa nach Baltzer oder Pascal. Bei der Untersuchung der Kegelschnitte kommt man in der Regel mit Determinanten zweiter und dritter Ordnung aus. Diese sind noch nicht so kompliziert, daß sie nicht in ausgeführter Form angeschrieben werden könnten. Aus der ausgeführten Form kann man die nötigen Sätze unmittelbar verifizieren, so daß sie kaum eines Beweises bedürfen. Wer sich

diese Sätze für den einfachen Fall der Determinanten zweiter und dritter Ordnung angeeignet hat, wird mit Leichtigkeit die Verallgemeinerung auf Determinanten höherer Ordnung vollziehen. Es folgt deshalb hier das für uns Wichtigste aus dieser Theorie unter Beschränkung auf die besagten Fälle. Die Elemente der Determinanten sollen hier durch Doppelindizes gekennzeichnet werden. Das Ersetzen derselben durch andere Zeichen oder durch Zahlen wird niemand Schwierigkeiten machen.

§ 79. Der Ausdruck

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

wird Determinante (zweiter Ordnung) genannt. Daß die Determinante verschwindet, wenn die entsprechenden Terme der beiden Zeilen oder Reihen, kürzer gesprochen, wenn zwei Zeilen oder zwei Reihen einander gleich oder einander proportional sind, ist unmittelbar ersichtlich. Ebenso daß sie ungeändert bleibt, wenn man eine Zeile (oder Reihe) mit irgend einem Faktor versehen zur anderen Zeile (oder Reihe) hinzuaddiert. Es braucht über diesen einfachsten Fall nichts weiter gesagt zu werden. Nur bemerken wir noch, daß die beiden linearen Gleichungen

$$a_{11}x + a_{12} = 0, \quad a_{21}x + a_{22} = 0$$

nur dann miteinander verträglich sind, wenn ihre Determinante $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ verschwindet.

§ 80. Der Ausdruck

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{21}(a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

den wir, wenn es ohne Zweideutigkeit zulässig ist, mit $|a_{11} a_{12} a_{13}|$ oder noch kürzer mit $|a|$ bezeichnen, wird die **Determinante** der Größen $a_{11} a_{12} \cdots a_{33}$ genannt. An der ausgeführten Form erkennt man ohne weiteres die Richtigkeit der Sätze:

Die Determinante wechselt ihre Zeichen, wenn man zwei Zeilen oder zwei Reihen miteinander vertauscht.

Sie verschwindet, wenn zwei Zeilen oder Reihen einander gleich sind.

Die Determinante (dritter Ordnung) bleibt ungeändert, wenn man die Zeilen oder auch die Reihen zyklisch untereinander vertauscht.

Die Determinante bleibt ungeändert, wenn man die Zeilen zu Reihen und die Reihen zu Zeilen macht, oder, wie man dies oft ausdrückt, wenn man die Determinante um ihre Hauptdiagonale umklappt.

Die Determinante bleibt ungeändert, wenn man eine Zeile bez. eine Reihe, mit einem Faktor versehen, zu einer anderen Zeile bez. Reihe hinzuaddiert.

Multipliziert man eine Zeile oder Reihe mit einem Faktor, so multipliziert man dadurch die Determinante mit diesem Faktor.

§ 81. Was in der Determinante $|a|$ mit $a_{\mu\nu}$ multipliziert ist, nennen wir die Adjunkte von $a_{\mu\nu}$ in der Determinante, wir bezeichnen sie mit $\alpha_{\mu\nu}$. Die Adjunkten haben die Formen

$$\alpha_{11} = a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}, \quad \alpha_{12} = a_{23} a_{31} - a_{21} a_{33}, \quad \alpha_{13} = a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31},$$
$$\alpha_{21} = a_{32} a_{13} - a_{12} a_{33}, \quad \alpha_{22} = a_{33} a_{11} - a_{13} a_{31}, \quad \alpha_{23} = a_{31} a_{12} - a_{11} a_{32},$$
$$\alpha_{31} = a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}, \quad \alpha_{32} = a_{13} a_{21} - a_{11} a_{23}, \quad \alpha_{33} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Man erhält die Adjunkte von $a_{\mu\nu}$ dadurch, daß man in der Determinante $|a|$ die $a_{\mu\nu}$ enthaltende Zeile und Reihe durchstreicht und die übrig bleibende Determinante zweiter Ordnung mit dem Faktor $(-1)^{\mu+\nu}$ versieht.

Aus den Sätzen des vorigen Paragraphen folgen die Beziehungen

$$|a| = a_{\mu 1} \alpha_{\mu 1} + a_{\mu 2} \alpha_{\mu 2} + a_{\mu 3} \alpha_{\mu 3} = a_{1\nu} \alpha_{1\nu} + a_{2\nu} \alpha_{2\nu} + a_{3\nu} \alpha_{3\nu},$$
$$0 = a_{\mu 1} \alpha_{\nu 1} + a_{\mu 2} \alpha_{\nu 2} + a_{\mu 3} \alpha_{\nu 3} = a_{1\mu} \alpha_{1\nu} + a_{2\mu} \alpha_{2\nu} + a_{3\mu} \alpha_{3\nu}; \; \mu \gtrless \nu.$$

Die Determinante $|\alpha|$ heißt die der Determinante $|a|$ adjungierte Determinante. Durch mechanisches Ausmultiplizieren erhält man die Beziehungen

$$\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32} = a_{11}\,|a|, \quad \alpha_{23}\alpha_{31} - \alpha_{21}\alpha_{33} = a_{12}\,|a|$$

usw., in Worten: Die Adjunkte des Termes $\alpha_{\mu\nu}$ in der $|a|$ adjungierten Determinante $|\alpha|$ ist gleich dem entsprechenden Terme der Mutterdeterminante multipliziert in dieselbe, also gleich $a_{\mu\nu}\,|a|$.

§ 82. Setzt man in der Gleichung

$$|\alpha| = \alpha_{11}(\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32}) + \alpha_{12}(\alpha_{23}\alpha_{31} - \alpha_{21}\alpha_{33}) + \alpha_{13}(\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{31})$$

für die Klammern (die Adjunkten der adjungierten Determinante) die eben gefundenen Ausdrücke ein, so folgt

$$(a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13})\,|a| = |\alpha| = |a|^2.$$

In Worten: Die adjungierte Determinante ist das Quadrat der Mutterdeterminante.

§ 83. Löst man von den drei Gleichungen

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \quad a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0,$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0$$

zwei auf, und setzt das Resultat in die dritte ein, so folgt, daß die drei Gleichungen nur dann miteinander verträglich sind, wenn ihre Determinante $|a|$ verschwindet. Ist dies der Fall, so ist

$$x : y : z = \alpha_{11} : \alpha_{12} : \alpha_{13} = \alpha_{21} : \alpha_{22} : \alpha_{23} = \alpha_{31} : \alpha_{32} : \alpha_{33}.$$

Die Verhältnisse der drei Unbekannten xyz, oder wenn man $z = 1$ setzt, die Zahlen xy sind durch diese Proportion vollständig bestimmt, wenn nicht die sämtlichen Adjunkten $\alpha_{\mu\nu}$ verschwinden.

Verschwinden die sämtlichen Adjunkten, ohne daß die $a_{\mu\nu}$ selbst sämtlich verschwinden, so sagt man die Determinante sei vom Range Eins. Verschwindet zwar $|a|$, verschwinden aber nicht sämtliche Adjunkten, so sagt man die Determinante sei vom Range Zwei.

§ 84. Sind

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \quad a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0,$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0$$

die Gleichungen dreier gerader Linien, die sich nicht in einem Punkte schneiden, deren Determinante $|a|$ also nicht verschwindet, so sind

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{13}}, \ \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{13}}; \ \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{23}}, \ \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{23}}; \ \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{33}}, \ \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{33}}$$

die Koordinaten der Schnittpunkte bez. von je zwei dieser Geraden, und das aus ihnen gebildete Dreieck hat den Inhalt (vgl. § 33)

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{13}}, & \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{13}}, & 1 \\ \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{23}}, & \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{23}}, & 1 \\ \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{33}}, & \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{33}}, & 1 \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}}{2\,\alpha_{13}\,\alpha_{23}\,\alpha_{33}} = \frac{|a|^2}{2\,\alpha_{13}\,\alpha_{23}\,\alpha_{33}}.$$

Die Form der Gleichung einer geraden Linie (§ 29)

$$xy_1 - yx_1 + x_1y_2 - y_1x_2 + x_2y - y_2x = 0$$

nannten wir Dreiecks- oder Determinantenform, weil sie

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

geschrieben werden kann.

§ 85. Symmetrische Determinanten. Eine Determinante heißt symmetrisch, wenn $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$ ist. Die unter § 81 für die Adjunkten gegebenen Ausdrücke lehren, daß die einer symmetrischen Determinante adjungierte Determinante ebenfalls symmetrisch ist.

Ist in einer symmetrischen Determinante $\alpha_{33} = 0$, so daß $a_{12} = \sqrt{a_{11}\,a_{22}}$ ist, und (unter Voraussetzung reeller a) a_{11} a_{22} gleiche Zeichen haben, so ist $|a|$ als ein Quadrat darstellbar. Denn es ist in diesem Falle

$$|a| = a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) + a_{32}(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) =$$

$$2a_{31}a_{23}\sqrt{a_{11}a_{22}} - a_{13}{}^2a_{22} - a_{23}{}^2a_{11} = -(a_{23}\sqrt{a_{11}} - a_{13}\sqrt{a_{22}})^2.$$

Ferner ist

$$\alpha_{13} = \alpha_{31} = \sqrt{a_{22}}(\sqrt{a_{11}}a_{23} - \sqrt{a_{22}}a_{13}) = \sqrt{a_{22}}\sqrt{-|a|}$$

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = \sqrt{a_{11}}(a_{13}\sqrt{a_{22}} - a_{23}\sqrt{a_{11}}) = -\sqrt{a_{11}}\sqrt{-|a|}.$$

Hieraus zieht man den Satz: Ist in einer symmetrischen Determinante $\alpha_{33} = 0$ und $|a|$ selbst gleich Null, so ist auch

$$\alpha_{13} = \alpha_{31} = 0, \quad \alpha_{23} = \alpha_{32} = 0.$$

Klassifikation der Kurven zweiter Ordnung.

§ 86. Bezeichnungen. Die allgemeine Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung ist:

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

$a_{\mu\nu}$ und $a_{\nu\mu}$ sollen als einander gleich angesehen werden; und es soll $\alpha_{\mu\nu} = \alpha_{\nu\mu}$ die Adjunkte von $a_{\mu\nu}$ in der Determinante $|a|$ sein. Setzt man

$$F_1(x,y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \quad F_2(x,y) = a_{21}x + a_{22}y + a_{23},$$
$$F_3(x,y) = a_{31}x + a_{32}y + a_{33},$$

so ist

$$F(x,y) = xF_1(x,y) + yF_2(x,y) + F_3(x,y).$$

Ferner sei

$$M(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

$$M_1 = a_{11}x + a_{12}y, \quad M_2 = a_{21}x + a_{22}y,$$

$$F(x,y) = M(x,y) + 2F_3(x,y) - a_{33},$$

so folgt durch einfache Ausrechnung

$$F(\xi + p, \eta + q) = F(\xi,\eta) + M(p,q) + 2pF_1(\xi,\eta) + 2qF_2(\xi,\eta),$$

worin gleichzeitig ξ und p, η und q vertauscht werden können.

Ist φ variabel, so bedeuten die Gleichungen

$$x = \xi + s\cos\varphi, \quad y = \eta + s\sin\varphi$$

einen Sehnenbüschel durch ξ, η. Die Schnitte der Sehnen mit der Kurve $F = 0$ werden durch die Wurzeln der Gleichung bestimmt

$$F(\xi, \eta) + 2s[\cos\varphi F_1(\xi, \eta) + \sin\varphi F_2(\xi, \eta)] + s^2 M(\cos\varphi, \sin\varphi) = 0.$$

Da eine Gleichung zweiten Grades stets zwei und nur zwei Wurzeln hat, so wird die Kurve von jeder Geraden in zwei und nur zwei Punkten getroffen, die freilich imaginär sein können, und aus diesem Grunde heißt die Kurve, deren Gleichung $F(x, y) = 0$ ist, eine Kurve zweiter Ordnung. Fallen die beiden Wurzeln in eine zusammen, so ist die Gerade Tangente und ihr Berührungspunkt ist zweimal zu zählen. Ist

$$M(\varphi) = M(\cos\varphi, \sin\varphi) = 0,$$

so ist ein Schnittpunkt ein uneigentlicher, ein unendlich ferner, er muß aber mitgezählt werden.

Die Gleichung kann aber auch identisch verschwinden, die Gerade kann ganz in die Kurve fallen, und es könnte scheinen, als ob dies bei jeder Kurve zweiter Ordnung für eine bestimmte Gerade der Fall wäre, weil zur Erfüllung der drei Gleichungen $M(\cos\varphi, \sin\varphi) = 0$, $\cos\varphi F_1(\xi, \eta) + \sin\varphi F_2(\xi, \eta) = 0$, $F(\xi, \eta) = 0$ drei Variabeln zur Disposition sind. Der Versuch, diese Gleichungen aufzulösen, lehrt aber, daß im allgemeinen diese drei Gleichungen nicht erfüllbar sind, und daß es eine Eigenschaft nur spezieller Kurven zweiter Ordnung ist, eine Gerade ganz zu enthalten, worüber die folgenden Untersuchungen genugsam Aufklärung geben. Man erhält nämlich für $\xi\eta$ unendlich große Werte, wodurch der Ansatz hinfällig wird. Man sieht daraus, wie eine bloße Konstantenabzählung zuweilen irreführen kann.

§ 87. Mittelpunkte. Liegt ξ, η auf den beiden Geraden*)

$$F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0,$$

*) Sind F_1, F_2 beide identisch Null, so ist jeder Punkt Mittelpunkt, die Kurve besteht dann aus der unendlich fernen Geraden doppelt gezählt.

so wird jede durch diesen Punkt $\xi = x_m$, $\eta = y_m$ gehende Gerade in ihm halbiert, der Punkt heißt Mittelpunkt. In der Regel schneiden sich die beiden Geraden in einem Punkte, $x_m = \alpha_{31} : \alpha_{33}$, $y_m = \alpha_{32} : \alpha_{33}$, so daß es nur einen Mittelpunkt gibt, nur wenn die Geraden zusammenfallen, wenn

$$a_{11} : a_{12} : a_{13} = a_{21} : a_{22} : a_{23}$$

ist, oder wenn eine der Formen $F_1 F_2$ identisch Null ist, so gibt es unendlich viele Mittelpunkte, welche eine Gerade erfüllen. F kann dann auf die Form gebracht werden

$$\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + \sqrt{-\alpha_{22}})(a_{11}x + a_{12}y + a_{13} - \sqrt{-\alpha_{22}}) = 0,$$

die Kurve zerfällt in zwei einander parallele gerade Linien, die für $\alpha_{22} = 0$ in eine zusammenfallen, und es ist $|a| = 0$. Ist $a_{11} = 0$, so muß $F_1(xy)$ identisch verschwinden, wenn unendlich viele Mittelpunkte vorhanden sein sollen. Da dann x in der Gleichung nicht vorkommt, so stellt sie zwei der x-Achse parallele Gerade dar. Es ergibt sich später, daß $|a| = 0$ stets das Zerfallen der Kurve in zwei gerade Linien bedeutet.

Numerisches Beispiel. Ist

$$F(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2 + 7x + 14y + 12,$$

so ist $|a| = 0$, und es folgt

$$F = (x + 2y + 3)(x + 2y + 4).$$

Ist $\alpha_{33} = 0$, $a_{11} : a_{12} = a_{21} : a_{22}$, und fallen die Geraden $F_1(x, y) = 0$, $F_2(x, y) = 0$ nicht ganz zusammen, so sind sie einander parallel, es gibt dann keinen eigentlichen Mittelpunkt, eine Kurve von dieser Eigenschaft heißt Parabel.

§ 88. Die Parabel. Ist φ konstant, ξ, η variabel, so bedeutet

$$x = \xi + s \cos \varphi, \quad y = \eta + s \sin \varphi$$

einen Büschel paralleler Sehnen, und die Mitten derselben liegen auf der Durchmesser genannten Geraden

$$F_1(\xi, \eta) \cos \varphi + F_2(\xi, \eta) \sin \varphi = 0$$

oder

$$\xi(a_{11}\cos\varphi + a_{21}\sin\varphi) + \eta(a_{12}\cos\varphi + a_{22}\sin\varphi)$$
$$+ a_{13}\cos\varphi + a_{23}\sin\varphi = 0,$$

und wenn $\alpha_{33} = 0$, $a_{12} = \sqrt{a_{11}\,a_{22}}$ ist,

$$\xi\sqrt{a_{11}} + \eta\sqrt{a_{22}} + \frac{a_{13}\cos\varphi + a_{23}\sin\varphi}{\sqrt{a_{11}}\cos\varphi + \sqrt{a_{22}}\sin\varphi} = 0.$$

$$\xi a_{11} + \eta a_{12} + \frac{a_{11}(a_{13}\cos\varphi + a_{23}\sin\varphi)}{a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi} = 0.$$

Daß $\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$ reell sind, kann man durch passende Wahl des Gesamtvorzeichens von F bewirken. Wir wollen $\sqrt{a_{11}}$ positiv annehmen.

Diese Geraden sind bei variabelen φ einander sämtlich parallel, d. h. die Durchmesser der Parabel sind einander sämtlich parallel. Steht ein Durchmesser auf den Sehnen, die er halbiert, denen er konjugiert ist, senkrecht, so heißt er Achse, für ihn muß $\sqrt{a_{11}} : \sqrt{a_{22}} = \cos\varphi : \sin\varphi = a_{12} : a_{22}$ sein (a_{11}, a_{22} haben notwendig gleiche Zeichen, weil $a_{11}a_{22} = a_{12}{}^2$ ist). Daraus fließt für die Achse die Gleichung

$$x\sqrt{a_{11}} + y\sqrt{a_{22}} + \frac{a_{13}\sqrt{a_{11}} + a_{23}\sqrt{a_{22}}}{a_{11} + a_{22}} = 0,$$

wobei $\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}} = a_{12}$ ist, so daß die Vorzeichen dieser Wurzeln nicht von einander unabhängig sind. Wird

$$(a_{13}\sqrt{a_{11}} + a_{23}\sqrt{a_{22}}) : (a_{11} + a_{22}) = b,$$
$$x\sqrt{a_{11}} + y\sqrt{a_{22}} + b = \eta\sqrt{a_{11} + a_{22}}$$

gesetzt, so ist

$$\eta^2(a_{11} + a_{22}) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2\sqrt{a_{11}}\,bx + 2\sqrt{a_{22}}\,by + b^2$$

und

$$F(x,y) = \eta^2(a_{11} + a_{22}) - 2x(\sqrt{a_{11}}\,b - a_{13}) - 2y(\sqrt{a_{22}}\,b - a_{23}) + a_{33} - b^2.$$

Da aber

$$\sqrt{a_{11}}\,b - a_{13} = \sqrt{a_{22}}\,\frac{a_{23}\sqrt{a_{11}} - a_{13}\sqrt{a_{22}}}{a_{11} + a_{22}} = \frac{\sqrt{a_{22}}\sqrt{-|a|}}{a_{11} + a_{22}}$$

$$\sqrt{a_{22}}\,b - a_{23} = \sqrt{a_{11}}\,\frac{a_{13}\sqrt{a_{22}} - a_{23}\sqrt{a_{11}}}{a_{11} + a_{22}} = \frac{-\sqrt{a_{11}}\sqrt{-|a|}}{a_{11} + a_{22}}$$

ist, so folgt

$$F(x,y)=\eta^2(a_{11}+a_{22})-\frac{2x\sqrt{a_{22}}\sqrt{-|a|}}{a_{11}+a_{22}}+\frac{2y\sqrt{a_{11}}\sqrt{-|a|}}{a_{11}+a_{22}}+a_{33}-b^2.$$

Setzt man weiter

$$\frac{x\sqrt{a_{22}}-y\sqrt{a_{11}}}{\sqrt{a_{11}+a_{22}}}+\frac{(b^2-a_{33})\sqrt{a_{11}+a_{22}}}{2\sqrt{-|a|}}=\xi,\quad \frac{\sqrt{-|a|}}{\sqrt{(a_{11}+a_{22})^3}}=p,$$

so folgt

$$\eta^2=2p\xi.$$

Die Größe p wird der Parameter der Parabel genannt.

Die Linien $\xi=0$ und $\eta=0$ sind in der Normalform gegeben, so daß ξ die Entfernung des Punktes xy von der Geraden $\xi=0$, η die von der Geraden $\eta=0$ bedeutet. Zudem stehen diese beiden Geraden senkrecht aufeinander. Man kann sie deshalb als ein Koordinatenkreuz ansehen, in dem $\xi\eta$ gewöhnliche Koordinaten sind. Die Gerade $\xi=0$ trifft die Kurve nur in einem Punkt, dem Scheitel der Parabel genannten Endpunkte der Achse auf der Kurve, sie ist Tangente (Scheiteltangente). Die Gerade $\eta=0$ ist die Achse der Parabel. Es ist leicht, sich aus dieser einfachen Gleichung von der Gestalt der Parabel wenigstens eine rohe Vorstellung zu machen.

Da die Durchmesser alle einander parallel sind, so ist es nicht schwer, wenn die Parabel gezeichnet vorliegt, die Achse zu konstruieren. Man zeichne zwei parallele Sehnen, ihre Mitten bestimmen einen Durchmesser. Man ziehe zwei Sehnen, die auf diesem Durchmesser senkrecht stehen. Ihre Mitten bestimmen die Achse.

§ 89. Numerisches Beispiel. Es sei eine Kurve zweiter Ordnung durch die Gleichung

$$F(x,y)=9x^2+2\cdot 12xy+16y^2+2\cdot 11x+2\cdot 23y+9=0$$

gegeben, so ist $a_{11}\,a_{22}-a_{12}\,a_{21}=9\cdot 16-12\cdot 12=0$. Die Kurve ist eine Parabel, wenn nicht noch $|a|=0$ ist. Nun ist $\sqrt{a_{11}}=3, \sqrt{a_{22}}=4$. Wir nehmen die erste Wurzel als positiv an, so muß es auch die zweite sein, weil a_{12} positiv ist. Es folgt

$$|a|=-(23\cdot 3-11\cdot 4)^2=-25\cdot 25,\quad \sqrt{-|a|}=25,$$
$$a_{11}+a_{22}=25,\quad |a|\neq 0.$$

Die Gleichung der Achse ist

$$3x + 4y + \frac{3 \cdot 11 + 4 \cdot 23}{25} = 3x + 4y + 5 = 0,$$

$$b = (3 \cdot 11 + 4 \cdot 23) : (9 + 16) = 5, \quad a_{33} - b^2 = 9 - 25 = -16,$$

$$p = 25 : 5^3 = 1 : 5.$$

Die Gleichung der Scheiteltangente und die reduzierte Gleichung ist

$$-4x + 3y - 8 = 0, \quad \eta^2 = 2 \cdot \tfrac{1}{5}\xi.$$

§ 90. Erzeugung der Parabel. Die Entfernung eines Punktes $x_0 y_0$ von einem Punkte xy der Parabel $y^2 = 2px$ ist

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{\frac{1}{4p^2} y^4 + \frac{y^2(p - x_0)}{p} - 2yy_0 + y_0^2 + x_0^2}.$$

Soll der Ausdruck unter der Wurzel ein vollständiges Quadrat sein, so muß zuerst $y_0 = 0$ sein, denn y muß wegfallen, ferner muß

$$(p - x_0)^2 : p^2 = x_0^2 : p^2, \quad x_0 = \tfrac{1}{2}p$$

sein. Die Entfernung des Brennpunkt genannten Punktes $x_0 = \frac{1}{2}p$, $y_0 = 0$ von einem Punkte der Parabel ist

$$\frac{y^2}{2p} + \tfrac{1}{2}p = x + \tfrac{1}{2}p,$$

ist also rational, eine Eigenschaft, die kein anderer Punkt besitzt. Die Entfernung eines Punktes der Parabel von der Geraden $x + \frac{p}{2} = 0$, die Direktrix heißt, ist ebenso groß. Auf diesem Satze beruht eine Erzeugungsweise der Parabel mittels eines Fadens.

§ 91. Die Mittelpunktsgleichung der Kurven zweiter Ordnung. Hat die Kurve einen Mittelpunkt, so sind seine Koordinaten

$$x_m : y_m : 1 = \alpha_{31} : \alpha_{32} : \alpha_{33},$$

und die Gleichung der Kurve läßt sich schreiben

$$F(x,y) = F(x_m + \overline{x - x_m}, y_m + \overline{y - y_m}) = M(x - y_m, y - y_m) - h,$$

$$h = -F(x_m, y_m) = -x_m F_1(x_m, y_m) - y_m F_2(x_m, y_m) - F_3(x_m, y_m)$$
$$= -F_3(x_m, y_m) = -|a| : \alpha_{33}.$$

Verlegt man den Koordinatenanfang in den Mittelpunkt, ersetzt $x - x_m$ durch x, $y - y_m$ durch y, so erhält man als Gleichung für die Mittelpunktskurve

$$M(x,y) = h.$$

Ist $h = 0$, also $|a| = 0$, so liegt der Mittelpunkt auf der Kurve; dieselbe zerfällt in zwei Gerade, und die Gleichung schreibt sich:

$$\frac{1}{a_{11}}\left(x a_{11} + y[a_{12} + \sqrt{-\alpha_{33}}]\right)\left(x a_{11} + y[a_{12} - \sqrt{-\alpha_{33}}]\right) = 0$$

oder wenn $a_{11} = 0$ ist

$$y(2a_{21}x + a_{22}y) = 0.$$

Ist bei der Parabel $p = 0$, also auch $|a| = 0$, so wird aus ihr eine Gerade, die doppelt zu zählen ist. Wir erkennen daraus, daß $|a| = 0$ allemal bedeutet, daß die Kurve in zwei gerade Linien zerfällt.

Verlegen wir zuerst das Koordinatenkreuz durch eine parallele Verschiebung, durch die Substitutionen $x = x' + p$, $y = y' + q$, so geht $F(x,y) = 0$ in die Gleichung über

$$a_{11}x'x' + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'y' + 2a'_{13}x' + 2a'_{22}y' + a'_{33} = 0,$$

wo

$$a'_{13} = a_{11}p + a_{12}q + a_{13} = F_1(p,q),$$

$$a'_{23} = a_{21}p + a_{22}q + a_{23} = F_2(p,q),$$

$$a'_{33} = a_{11}p^2 + 2a_{12}pq + a_{22}q^2 + 2pa_{13} + 2qa_{23} + a_{33} = F(p,q)$$

ist, und reduzieren nun die Gleichung durch eine zweite Verschiebung auf die Mittelpunktsgleichung, so müssen wir dasselbe Resultat erhalten, als ob wir die Verschiebung direkt vorgenommen hätten, woraus folgt, daß

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}$$

ist, oder mit anderen Worten, die Determinante $|a|$ ist bei paralleler Verschiebung des Koordinatenkreuzes eine Invariante.

Man beweist diesen Satz ebenso leicht mit Hilfe der Determinantensätze des § 81.

Wir diskutieren nun die auf den Mittelpunkt bezogene Kurvengleichung und behandeln insbesondere das Achsenproblem.

§ 92. Konjugierte Durchmesser. Die Halbierungspunkte des Büschels paralleler Sehnen der Richtung α,

$$(S_\alpha), \quad x = \xi + s \cos \alpha, \quad y = \eta + s \sin \alpha,$$

liegen auf dem ihnen konjugierten Durchmesser

$$x M_1 (\cos \alpha, \sin \alpha) + y M_2 (\cos \alpha, \sin \alpha) = 0.$$

Die Sehnen, welche diesem Durchmesser parallel sind, haben die Gleichungen

$$x = \xi + s \cos \beta, \quad y = \eta + s \sin \beta,$$

$$\cos \beta = M_2(\cos \alpha, \sin \alpha) : N, \quad \sin \beta = - M_1(\cos \alpha, \sin \alpha) : N,$$

$$N = \sqrt{M_1^2(\cos \alpha, \sin \alpha) + M_2^2(\cos \alpha, \sin \alpha)}.$$

Der ihnen konjugierte Durchmesser hat die Gleichung

$$x M_1(M_2, - M_1) + y M_2(M_2, - M_1) = 0$$

oder

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0,$$

er ist der in dem ersten Sehnenbüschel enthaltene Durchmesser. Die Durchmesser sind also einander gegenseitig konjugiert. Der einer Sehne konjugierte Durchmesser ist ein bestimmter, wenn nicht zugleich

$$M_1(\alpha) = M_1(\cos \alpha, \sin \alpha) = 0, \quad M_2(\alpha) = M_2(\cos \alpha, \sin \alpha) = 0$$

ist, was nur bei Kurven vorkommt, bei denen $\alpha_{33} = 0$ ist, die aus zwei parallelen Geraden bestehen. Dort gibt es in der

Tat einen Sehnenbüschel, dem unendlich viele Durchmesser konjugiert sind.

§ 93. Achsen. Achsen sind konjugierte Durchmesser, die senkrecht aufeinander stehen. Für sie muß

$$\cos\alpha : \sin\alpha = M_1(\cos\alpha, \sin\alpha) : M_2(\cos\alpha, \sin\alpha)$$

oder, unter Einführung eines Proportionalitätsfaktors σ,

$$M_1(\cos\alpha, \sin\alpha) = \sigma\cos\alpha, \quad M_2(\cos\alpha, \sin\alpha) = \sigma\sin\alpha$$

sein. Hieraus folgt

$$\sigma = \cos\alpha M_1 + \sin\alpha M_2 = M(\cos\alpha, \sin\alpha) = M(\alpha).$$

und durch Elimination von σ

$$M_1(\alpha)\sin\alpha = M_2(\alpha)\cos\alpha,$$

$$a_{11}\cos\alpha\sin\alpha + a_{12}\sin^2\alpha = a_{21}\cos^2\alpha + a_{22}\cos\alpha\sin\alpha,$$

$$(a_{11} - a_{22})\sin 2\alpha = 2a_{21}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 2a_{12}\cos 2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 2a_{12} : (a_{11} - a_{22}).$$

Diese Gleichung gibt zwei Werte für α, die sich um einen rechten Winkel unterscheiden.

Ist D_α der zu α gehörende Halbmesser, so daß die Koordinaten seines Endpunktes $D_\alpha\cos\alpha$, $D_\alpha\sin\alpha$ sind, so folgt aus der Kurvengleichung

$$D_\alpha = \sqrt{h : M(\cos\alpha, \sin\alpha)}.$$

Ist α die Richtung einer Achse, so ist $M(\alpha) = \sigma$ und folglich

$$D = \sqrt{h : \sigma}, \quad \sigma = h : DD.$$

Wird eine der Achsen zur x-Achse gemacht, während der Mittelpunkt der Koordinatenanfang bleibt, so muß die Gleichung die Form haben $Ax^2 + By^2 - C = 0$, d. h. das Glied x, y muß fehlen, weil die Ordinaten der x-Achse konjugierte Sehnen sind, woraus von selbst folgt, daß die andere Koordinatenachse auch Kurvenachse ist.

§ 94. Die Gleichung für die Halbachsen. Da also $\sqrt{h}:\sigma$ eine Halbachse ist, wenn σ der einer Achsenrichtung entsprechende Wert ist, so kann man die Gleichung, welche aus dem System

$$(a_{11}-\sigma)\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = 0, \quad a_{12}\cos\alpha + (a_{22}-\sigma)\sin\alpha = 0$$

durch Elimination von α entspringt, die charakteristische Gleichung

$$G(\sigma) = (a_{11}-\sigma)(a_{22}-\sigma) - a_{12}a_{21} = 0,$$

die Gleichung der Halbachsen nennen. Ihre Diskriminante (das vierfache Quadrat der Wurzeldifferenz)

$$\varDelta = (a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}$$

ist eine Summe von zwei Quadraten, also positiv, woraus folgt, daß sie zwei reelle Wurzeln hat, die natürlich auch zusammenfallen können. Sind σ_1 und σ_2 die Wurzeln der Gleichung $G(\sigma) = 0$, und setzt man σ_1 oder σ_2 in die beiden ersten Gleichungen dieses Paragraphen ein, so erhält man für $\operatorname{tg}\alpha$ die beiden Werte

$$\frac{\sigma_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{\sigma_1 - a_{22}}, \quad \frac{\sigma_2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{\sigma_2 - a_{22}},$$

nur wenn $a_{12} = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = a_{11} = a_{22}$ ist, also im Falle gleicher Wurzeln, ist α unbestimmt. Dies ist der Fall des Kreises, dessen sämtliche Durchmesser Achsen sind. — Für die Achsenrichtung ergibt sich demnach

$$\operatorname{tg}\alpha = (a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{\varDelta}) : 2a_{12}.$$

Die beiden Ausdrücke sind Wurzeln der Gleichung

$$a_{12}\operatorname{tg}^2\alpha + (a_{11}-a_{22})\operatorname{tg}\alpha - a_{12} = 0,$$

woraus man noch leicht $\operatorname{tg}2\alpha = 2a_{12} : (a_{11}-a_{22})$ findet, was uns schon bekannt ist.

Die Gleichung einer Achse $x\sin\alpha - y\cos\alpha$ ist

$$x(a_{11}-\sigma) + y a_{12} = 0,$$

worin für σ eine Wurzel der Gleichung $G(\sigma) = 0$ zu setzen ist. Die Gleichung einer Achse der Kurve $F(x,y) = 0$ ist daher

$$(x - x_m)(a_{11} - \sigma) + (y - y_m)a_{12} =$$

$$x(a_{11} - \sigma) + y a_{12} - \frac{(a_{11} - \sigma\ \alpha_{31} + a_{12}\alpha_{32} + a_{13}\alpha_{33} - a_{13}\alpha_{33}}{\alpha_{33}}$$

$$= x(a_{11} - \sigma) + y a_{12} + a_{13} + \frac{\sigma\,\alpha_{31}}{\alpha_{33}} = 0.$$

§ 95. Numerisches Beispiel. Es sei

$$F(x,y) = 3x^2 - 4xy + 2y^2 - 7x - 5y - 3 = 0,$$

$$a_{11} = 3,\quad a_{12} = -2,\quad a_{22} = 2,\quad a_{13} = -\tfrac{1}{2}7,\quad a_{23} = -\tfrac{1}{2}5,\quad a_{33} = -3,$$

$$\alpha_{31} = 12,\quad \alpha_{32} = \tfrac{1}{2}29,\quad \alpha_{33} = 2,\quad |a| = -337:4,$$

$$x_m = 6,\quad y_m = \tfrac{1}{4}29,\quad h = 337:8,$$

$$G(\sigma) = \sigma^2 - 5\sigma + 2,\quad \sigma_1 = \tfrac{1}{2}5 - \tfrac{1}{2}\sqrt{17},\quad \sigma_2 = \tfrac{1}{2}5 + \tfrac{1}{2}\sqrt{17}.$$

Die Gleichungen der Achsen sind

$$(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{17})(x - 6) - 2(y - \tfrac{1}{4}29) = 0,$$

$$(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{17})(x - 6) - 2(y - \tfrac{1}{4}29) = 0,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -4,\quad 2\alpha = -75^0 58',\quad \alpha = -37^0 59' \text{ und } \alpha = 52^0 1'.$$

Die Längen der Halbachsen sind $\sqrt{337} : 2\sqrt{5 \pm \sqrt{17}}$.

Zweites Beispiel. Die Gleichung $xy + x + y + \frac{1}{2} = 0$ multipliziere man zur bequemeren Rechnung mit 2, so daß man hat

$$F(x,y) = 2xy + 2x + 2y + 1,\quad a_{11} = 0,\quad a_{12} = 1,\quad a_{22} = 0,$$

$$a_{13} = 1,\quad a_{23} = 1,\quad a_{33} = 1,\quad \alpha_{33} = -1.$$

$$\alpha_{31} = 1,\quad \alpha_{32} = 1,\quad |a| = 1,\quad h = 1,\quad G(\sigma) = \sigma^2 - 1,\quad \sigma_1 = 1,$$

$$\sigma_2 = -1.$$

Der Mittelpunkt hat die Koordinaten $x_m = -1$, $y_m = -1$. Die Halbachsen sind 1 und $i = \sqrt{-1}$, es ist also eine Länge imaginär (Hyperbel). Die Gleichungen der Achsen sind

$$-x + y = 0,\quad x + y + 2 = 0,\quad \alpha = \tfrac{1}{4}\pi \quad\text{und}\quad \alpha = \tfrac{3}{4}\pi.$$

§ 96. Die orthogonale Substitution. Sind $\xi\eta$ die Koordinaten eines Punktes der xy-Ebene bezogen auf ein Koor-

dinatenkreuz das denselben Kreuzpunkt hat als das xy-Kreuz, ist aber die ξ-Achse um den Winkel ω gegen die x-Achse gedreht, die η-Achse um den Winkel $\omega + \frac{1}{2}\pi$, so ist

$$\xi = x \cos \omega + y \sin \omega, \quad \eta = -x \sin \omega + y \cos \omega,$$

$$x = \xi \cos \omega - \eta \sin \omega, \quad y = \xi \sin \omega + \eta \cos \omega.$$

Denn ξ ist die Entfernung des Punktes xy von einer Geraden, der η-Achse, deren Normale, die ξ-Achse, mit der x-Achse den Winkel ω einschließt, η die Entfernung desselben Punktes von einer Geraden, die mit der x-Achse den Winkel $\omega + \frac{1}{2}\pi$ einschließt.

Diese Substitution, die man eine orthogonale Substitution nennt, und die die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 - k^2 = 0$ oder den quadratischen Teil der Gleichung eines beliebigen Kreises ungeändert läßt, vermittelt den Übergang von einem rechtwinkligen Koordinatensystem zu einem andern mit demselben Koordinatenanfang.

Die Determinante dieser Substitution hat den Wert

$$\cos \omega \cos \omega - \sin \omega \cdot - \sin \omega = \cos^2 \omega + \sin^2 \omega = 1.$$

Die η-Achse liegt so zur ξ-Achse, daß sie durch eine positive Drehung um 90^0 aus ihr erhalten wird, so daß das Kreuz $\xi\eta$ durch Drehung aus dem Kreuze xy erhalten werden kann, wenn dieses dieselbe Lage hat.

Eine solche Koordinatentransformation wird eine kanonische orthogonale Transformation genannt, wird aber η durch $-\eta$ ersetzt, so daß

$$\xi = x \cos \omega + y \sin \omega, \quad \eta = x \sin \omega - y \cos \omega$$

ist, so ist die Determinante -1 und die Substitution heißt eine akanonische orthogonale Substitution. Sie erfordert nicht bloß eine Drehung in der Ebene, sondern noch ein Umklappen unter Vermittlung des Raumes.

Will man jede Überführung eines rechtwinkligen Koordinatensystems in ein anderes eine orthogonale Substitution nennen, so muß man neben der Drehung noch eine Verschiebung zu-

lassen, und die Transformation wird durch die Gleichungen vermittelt

$$\xi = a + x \cos \omega + y \sin \omega, \quad \pm \eta = b - x \sin \omega + y \cos \omega.$$

Unter einer orthogonalen Substitution scheint aber allgemein nur eine homogene Substitution verstanden zu werden. Wir wollen deshalb die letzte Transformation die allgemeine orthogonale Transformation nennen, und die, in der $a = 0$, $b = 0$ ist, schlechthin die orthogonale Transformation.

§ 97. Nimmt man an, daß $\xi\eta, xy$ nicht die Koordinaten desselben Punktes sind, bezogen auf verschiedene Kreuze, sondern Koordinaten verschiedener Punkte, bezogen auf dasselbe Kreuz, so konstituieren die Transformationsgleichungen der allgemeinen orthogonalen Substitution die Verwandtschaft der Kongruenz, oder der starren Bewegung. Jede Bewegung der starrgedachten Ebene in sich läßt sich in eine Parallelverschiebung und eine Drehung zerlegen. Die erste entspricht den Verwandtschaftsgleichungen

$$\xi = a + x, \quad \eta = b + y.$$

Durch sie wird jede Gerade $Ax + By + C = 0$ in eine ihr parallele $A\xi + B\eta - aA - bB + C = 0$ verschoben. Ihre Richtung bleibt demnach dabei unverändert. Da nun parallele gerade Linien ihren unendlich fernen Punkt gemein haben, so bleiben bei dieser Bewegung alle unendlich fernen Punkte in Ruhe. Bei einer Drehung aber gehen die unendlich fernen Punkte im allgemeinen in andere unendlich ferne über, die Richtung einer Geraden ändert sich durch Drehung. Jeder im endlichen liegende Punkt aber außer dem Drehpunkt geht in einen anderen über. Man kann fragen, ob es doch nicht Richtungen gibt, die bei einer Drehung ungeändert bleiben.

Die Gerade $Ax + By = 0$ geht durch unsere orthogonale Substitution über in

$$A(\xi \cos \omega + \eta \sin \omega) + B(-\xi \sin \omega + \eta \cos \omega) =$$

$$\xi(A \cos \omega - B \sin \omega) + \eta(A \sin \omega + B \cos \omega) = 0,$$

soll diese Gerade dieselbe Richtung haben, also zusammenfallen mit der ursprünglichen, so muß ihre Gleichung die Form

$$\sigma A \xi + \sigma B \eta = 0$$

haben, es muß also

$$A(\cos \omega - \sigma) - B \sin \omega = 0, \quad A \sin \omega + B (\cos \omega - \sigma) = 0$$

sein. Diese beiden Gleichungen sind miteinander nur verträglich, wenn ihre Determinante

$$(\cos \omega - \sigma)^2 + \sin^2 \omega = \sigma^2 - 2\sigma \cos \omega + 1 = 0$$

ist, also wenn $\sigma = \cos \omega \pm i \sin \omega$ ist. Es folgt

$$\mp Ai \sin \omega - B \sin \omega = 0, \quad B = \mp iA.$$

Es gibt demnach zwei Richtungen, nämlich die der Geraden

$$x + yi = 0, \quad x - yi = 0,$$

die durch eine Drehung der starren Ebene nicht verändert werden, die festbleiben. Sie sind imaginär.

Die unendlich fernen (imaginären) Punkte dieser Geraden bleiben nicht bloß bei Drehung, sondern auch bei Verschiebung, also bei jeder Bewegung der starren Ebene in sich in Ruhe. Sie heißen deshalb die absoluten Punkte. Wir kommen auf dieselben noch zurück. Klappt man die Ebene um eine Gerade in sich um, so vertauschen sich die absoluten Punkte. Da die nach einem absoluten Punkte gehenden Geraden nicht auf die Normalform gebracht werden können, so besteht der Begriff der Entfernung eines Punktes von einer solchen Geraden nicht. Überhaupt aber gelangt man, wenn man sich der gewöhnlichen Terminologie bedient, zu manchen Paradoxien, die dadurch aufgelöst werden, daß die zugehörigen Begriffe uneigentliche werden. Man muß dies bei Gelegenheit an Beispielen erörtern. Z. B. die Geraden $x + \lambda y = 0$, $x - (y : \lambda) = 0$ bilden eine Involution, deren Paare senkrecht aufeinander stehen. Man könnte also zu dem Schluße gelangen, daß die Doppelstrahlen $\lambda = \pm i$ auf sich selbst senkrecht stehen.

§ 98. Orthogonale Invarianten. Die Form

$$M(x, y) = a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2$$

geht durch die Substitution

$$x = p_1 x' + q_1 y', \quad y = p_2 x' + q_2 y'$$

in die Form

$$M'(x', y') = a'_{11} x'^2 + 2 a'_{12} x' y' + a'_{22} y'^2$$

über, wenn

$$a'_{11} = a_{11} p_1^2 + 2 a_{12} p_1 p_2 + a_{22} p_2^2 = M(p_1, p_2),$$
$$a'_{12} = a_{11} p_1 q_1 + a_{12}(p_1 q_2 + p_2 q_1) + a_{22} p_2 q_2 = M(p_1; q_1),$$
$$a'_{22} = a_{11} q_1^2 + 2 a_{12} q_1 q_2 + a_{22} q_2^2 = M(q_1, q_2)$$

ist, und man erhält hieraus die Beziehung

$$a'_{11} a'_{22} - a'_{12} a'_{21} = (p_1 q_2 - q_1 p_2)^2 (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}).$$

Es unterscheidet sich also α'_{33} von α_{33} nur durch eine Potenz der Substitutionsdeterminante, man nennt deshalb α_{33} eine Invariante der Form M. Ist

$$p_1 = \cos \omega, \quad q_1 = -\sin \omega, \quad p_2 = \sin \omega, \quad q_2 = \cos \omega,$$

so ist diese Determinante Eins, und es ist daher $\alpha_{33} = o_2$ für eine orthogonale Substitution eine absolute Invariante. Für eine orthogonale Substitution ist ferner

$$o_1 = a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22};$$

es ist also für eine orthogonale Substitution die Summe der Koeffizienten von xx und yy ebenfalls eine absolute Invariante und es ist identisch

$$G(\sigma) = (\sigma - a_{11})(\sigma - a_{22}) - a_{12} a_{21} =$$
$$G'(\sigma) = (\sigma - a'_{11})(\sigma - a'_{22}) - a'_{12} a'_{21}.$$

§ 99. Die Achsengleichungen der Mittelpunktskurven zweiter Ordnung. Transformiert man durch eine orthogonale Substitution (durch Drehung bez. Umklappung des Koordinatenkreuzes) $M(x, y) - h$ in die Form

$$a'_{11} x^2 + a'_{22} y^2 - h,$$

(auf h hat die Substitution keinen Einfluß), d. h. macht man

eine Kurvenachse zur x-Achse, so müssen $a_{11}' = \sigma_1$, $a_{22}' = \sigma_2$ die Wurzeln der Gleichung $G(\sigma) = 0$ sein. Die Kurvengleichung wird $\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 - h = 0$.

Der der Richtung α konjugierte Durchmesser hat nach dieser Transformation die Gleichung

$$x\sigma_1 \cos\alpha + y\sigma_2 \sin\alpha = 0,$$

soll er auf der Richtung α senkrecht stehen, soll $\sigma_1 \cos\alpha : \sigma_2 \sin\alpha = \cos\alpha : \sin\alpha$ sein, so muß gleichzeitig $(\sigma_1 - \sigma)\cos\alpha$ und $(\sigma_2 - \sigma)\sin\alpha = 0$ sein. Wenn $\sigma_1 = \sigma_2$, also wenn die Kurve ein Kreis ist, so werden für $\sigma = \sigma_1$ die Gleichungen von selbst befriedigt, sonst aber nur entweder für $\alpha = 0$, $\sigma = \sigma_1$ oder $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, $\sigma = \sigma_2$. Es gibt daher nur zwei Achsen, sie stehen aufeinander senkrecht und sind einander konjugiert.

Beim Kreise stehen alle Paare konjugierter Durchmesser senkrecht aufeinander. Sind σ_1, σ_2 positiv, ist also α_{33} und $a_{11} + a_{22}$ positiv, so heißt die Kurve Ellipse, und sie ist reell, wenn h positiv ist. Sind σ_1, σ_2 von entgegengesetzten Zeichen, so muß α_{33} negativ sein, und die Kurve heißt Hyperbel. Ist $\alpha_{33} = 0$ (bei einer Mittelpunktsgleichung), so zerfällt die Kurve in zwei parallele Gerade. Da durch die Verschiebung der Koordinaten a_{11}, a_{12}, a_{22} nicht geändert werden, so gelten diese Kriterien, wenn noch das Zeichen von $h = -|a| : \alpha_{33}$ mit berücksichtigt wird, auch für die allgemeine Gleichung, mit Ausnahme des letzteren, welches auf die Parabel führt, wenn $|a|$ nicht Null ist.

Da $\sigma_1 \sigma_2$ stets reell sind, so folgt aus der Bedingung $\sigma_1 \sigma_2 = \alpha_{33} > 0$, daß $\sigma_1 \sigma_2$ gleiche Zeichen haben. Sind sie negativ, ist $a_{11} + a_{22}$ negativ, so ist die Kurve bei positiven h imaginär, man kann sie eine imaginäre Ellipse nennen.

§ 100. Unendlich ferne Punkte werden, da parallele Geraden sich in denselben unendlich fernen Punkten treffen, durch Richtungen bestimmt. Die Gerade $x = \xi + s\cos\alpha$, $y = \eta + s\sin\alpha$ trifft die Kurve $F(xy) = 0$ in Punkten, deren Entfernungen von $\xi\eta$ durch die Gleichung

$$F(\xi,\eta) + 2s\,(\cos\alpha\, F_1(\xi,\eta) + \sin\alpha\, F_2(\xi,\eta)) + s^2 M(\cos\alpha, \sin\alpha) = 0$$

bestimmt werden. Verschwindet

$$M(\cos\alpha, \sin\alpha) = a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha + a_{22}\sin^2\alpha,$$

$$[\operatorname{tg}\alpha = (-a_{12} \pm \sqrt{-\alpha_{33}}) : a_{22}],$$

so ist eine der beiden Entfernungen unendlich groß. Die Gleichung $M(\cos\alpha, \sin\alpha) = 0$ bestimmt die beiden unendlich fernen Punkte von F. Ist $\alpha_{33} > 0$, so sind die unendlich fernen Punkte imaginär, die Kurve ist eine (reelle oder imaginäre) Ellipse, ist $\alpha_{33} < 0$, so sind sie reell, die Kurve ist eine Hyperbel, ist $\alpha_{33} = 0$, so fallen die beiden Richtungen zu einer zusammen, die Parabel besitzt also nur einen unendlich fernen Punkt, die unendlich ferne Gerade berührt die Parabel. Zwei gerade Linien durch die unendlich fernen Punkte sind unmittelbar durch die Gleichung $M(x, y) = 0$ gegeben. Kurven zweiter Ordnung, deren Gleichungen in ihrem quadratischen Teil übereinstimmen, haben dieselben unendlich fernen Punkte. Ist $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$, ist die Kurve ein Kreis, so sind

$$x + yi = 0, \quad x - yi = 0$$

zwei gerade Linien durch die unendlich fernen Kreispunkte, die absoluten Punkte. Jeder Kreis enthält sie, und es wird $\operatorname{tg}\alpha$ durch die Gleichung bestimmt

$$\operatorname{tg}^2\alpha = -1, \quad \operatorname{tg}\alpha = \pm i,$$

woraus folgt $\alpha = \varphi \pm i\infty$, worin φ ganz willkürlich ist, so daß die Neigung einer nach einem absoluten Punkte gehenden Geraden gegen die x-Achse, oder gegen eine beliebige andere Gerade unendlich groß und zugleich imaginär ist. Hierdurch wird es erklärlich, wie die absoluten Punkte bei einer Drehung einer Ebene in sich in Ruhe bleiben können. Bei Verschiebungen bleiben sie fest wie jeder andere unendlich ferne Punkt.

Die geraden Linien, die durch die Gleichung

$$M(x - x_m, y - y_m) = 0$$

gegeben sind, treffen die Kurve $F(x, y) = 0$ im Endlichen nicht mehr, sie berühren die Kurve im Unendlichen und heißen Asymptoten.

Die Asymptoten sind die vom Mittelpunkte an die Kurve gezogenen Tangenten. Wird der Winkel, den sie einschließen, A genannt, so ist

$$\operatorname{tg} A = 2\sqrt{-\alpha_{33}} : (a_{11} + a_{22}) = 2\sqrt{-o_2} : o_1.$$

In den nächsten Paragraphen werden manche Sätze noch einmal ausgesprochen und hergeleitet, die uns schon bekannt sind. Aus der auf die Achsen bezogenen Gleichung gehen sie mit besonderer Einfachheit hervor.

Konjugierte Durchmesser und metrische Eigenschaften.

§ 101. Schneidet ein Büschel (S_α) paralleler Sehnen

$$x = \xi + s\cos\alpha, \quad y = \eta + s\sin\alpha$$

die Kurve zweiter Ordnung

$$\sigma_1 xx + \sigma_2 yy - h = 0,$$

so werden diese Sehnen im Punkt ξ, η halbiert, wenn er auf dem Durchmesser D'

$$x\sigma_1\cos\alpha + y\sigma_2\sin\alpha = 0$$

liegt. Der Büschel (S_α) und speziell der in ihm enthaltene Durchmesser D ist D' konjugiert, oder von den Durchmessern

(D) $\qquad x = s\cos\alpha \quad y = s\sin\alpha,$

(D′) $\qquad x = s\sigma_2\sin\alpha : N \quad y = -s\sigma_1\cos\alpha : N,$

$$N = \sqrt{(\sigma_1{}^2\cos^2\alpha + \sigma_2{}^2\sin^2\alpha)},$$

ist D konjugiert D'.

Soll D dem Durchmesser (D′) $x = s\cos\alpha'$, $y = s\sin\alpha'$ konjugiert sein, so müssen seine Koordinaten die Gleichung

$$x\sigma_1\cos\alpha + y\sigma_2\sin\alpha = 0$$

befriedigen, woraus folgt

$$\sigma_1\cos\alpha\cos\alpha' + \sigma_2\sin\alpha\sin\alpha' = 0.$$

Der Durchmesser $\varDelta = xA + yB = 0$ wird durch die Gleichungen

$$x = sB : \sqrt{A^2 + B^2}, \quad y = -sA : \sqrt{A^2 + B^2}$$

dargestellt, der Durchmesser $\varDelta' = xA' + yB'$ durch die Gleichungen

$$x = sB' : \sqrt{A'^2 + B'^2}, \quad y = -sA' : \sqrt{A'^2 + B'^2}.$$

$$\varDelta = xA + yB = 0, \quad \varDelta' = xA' + yB' = 0$$

sind konjugiert, wenn $\sigma_1 BB' + \sigma_2 AA' = 0$, oder wenn

$$\frac{AA'}{\sigma_1} + \frac{BB'}{\sigma_2} = 0$$

ist. Aus der Symmetrie der Bedingungen für das Konjugiertsein folgt noch einmal der uns schon bekannte Satz:

Ist DD' konjugiert, so ist auch $D'D$ konjugiert.

Konjugierte Durchmesser bilden eine Involution. Es werde

$$\operatorname{tg}\alpha = X, \quad \operatorname{tg}\alpha' = X'$$

gesetzt, so sind die beiden Durchmesser $x \sin\alpha - y \cos\alpha = 0$, $x \sin\alpha' - y \cos\alpha' = 0$ konjugiert, wenn

$$\sigma_2 XX' + \sigma_1 = 0$$

ist. Nach § 23 stehen deshalb konjugierte Durchmesser in Involution, das rechtwinklige Paar gibt die Achsen. Ist $\sigma_1 : \sigma_2$ positiv, ist die Kurve eine Ellipse, so gibt es keine reellen Doppelstrahlen ($X = \sqrt{-\sigma_1 : \sigma_2}$). Haben σ_1, σ_2 entgegengesetzte Zeichen, so gibt $\operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{-\sigma_1 : \sigma_2}$ die Doppelstrahlen, sie sind die Asymptoten der Kurve und sich selbst konjugierte Durchmesser. Aus dem Umstande, daß sie bei der Hyperbel reell, bei der Ellipse imaginär sind, leiten sich die Bezeichnungen hyperbolische und elliptische Involution her. Die Achsen sind das rechtwinklige Paar der Involution. Da eine Involution durch die Doppelstrahlen völlig bestimmt ist und da diesen bei den Durchmessern einer Kurve zweiter Ordnung jedwede Lage gegeben werden kann, so kann man jede Strahleninvolution mit einer Involution konjugierter Durchmesser zur Deckung bringen.

Hälftet ein Durchmesser eine Sehne, so hälftet er auch jede ihr parallele, und ist ihr konjugiert. Unter diesen Sehnen befinden sich zwei Tangenten, wenn der Durchmesser die Kurve reell trifft. Ein Durchmesser ist den in seinen Endpunkten gezogenen Tangenten konjugiert.

Verbindet man die Endpunkte eines Durchmessers mit einem beliebigen Punkte der Kurve, so sind diese Verbindungslinien einem Paare konjugierter Durchmesser parallel. (Im Kreise ist der Peripheriewinkel über einem Durchmesser ein Rechter.)

§ 102. Die Längen der Halbachsen sind:

$$\sqrt{h:\sigma_1}, \quad \sqrt{h:\sigma_2},$$

bei der Hyperbel ist eine von ihnen imaginär. Bedeuten

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \cdots + a_{33} = 0$$

und

$$F'(x',y') = a_{11}'x'^2 + 2a_{12}'x'y' + \cdots + a_{33}' = 0$$

dieselbe Kurve zweiter Ordnung bezogen auf verschiedene rechtwinklige Koordinatensysteme, so ist $a_{33}' = a_{33}$ und die Größen $\sigma_1 \sigma_2$ sind für beide Kurven dieselben nach § 98. Da aber auch die Achsen dieselben sind, so muß

$$h:\sigma_1 = -|a|:\sigma_1 a_{33} = -|a'|:\sigma_1 a_{33}' \quad |a| = |a'|$$

sein. Es folgt aus dieser geometrischen Betrachtung der algebraische Satz, daß $|a|$ gegenüber der allgemeinen orthogonalen Transformation eine absolute Invariante ist.

§ 103. Metrische Eigenschaften konjugierter Durchmesser. Es werde $h = 1$ gesetzt. Die Länge des Halbmessers $x = s\cos\alpha$, $y = s\sin\alpha$ sei D_α, die des konjugierten $x = s\cos\alpha'$, $y = s\sin\alpha'$ sei $D_{\alpha'}$, so ist

$$D_\alpha = 1:\sqrt{\sigma_1\cos^2\alpha + \sigma_2\sin^2\alpha}, \quad D_{\alpha'} = 1:\sqrt{\sigma_1\cos^2\alpha' + \sigma_2\sin^2\alpha'},$$

$$\cos\alpha' = \sigma_2\sin\alpha : N, \quad \sin\alpha' = -\sigma_1\cos\alpha : N,$$

$$N^2 = \sigma_1^2\cos^2\alpha + \sigma_2^2\sin^2\alpha.$$

Setzt man die für $\cos\alpha'$ $\sin\alpha'$ erhaltenen Werte in $D_{\alpha'}$ ein, so folgt

$$D_{\alpha'} = \frac{N : \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha}} = \frac{N D_\alpha}{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}}$$

und daraus ergibt sich, daß bei der Hyperbel von zwei konjugierten Durchmessern immer nur der eine eine reelle Länge besitzt

Setzt man nun

$$D_\alpha \sqrt{\sigma_1 \cos\alpha} = \cos\omega, \quad D_\alpha \sqrt{\sigma_2 \sin\alpha} = \sin\omega,$$

$$D_{\alpha'} \sqrt{\sigma_1 \cos\alpha'} = \cos\omega', \quad D_{\alpha'} \sqrt{\sigma_2 \sin\alpha'} = \sin\omega',$$

so folgt aus der Gleichung $\sigma_1 \cos\alpha \cos\alpha' + \sigma_2 \sin\alpha \sin\alpha' = 0$:

$$\cos\omega \cos\omega' + \sin\omega \sin\omega' = \cos(\omega - \omega') = 0, \quad \omega' = \omega + \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$D_{\alpha'} \sqrt{\sigma_1} \cos\alpha' = -\sin\omega, \quad D_{\alpha'} \sqrt{\sigma_2} \sin\alpha' = \cos\omega.$$

Daraus folgt

$$D_\alpha^2 \cos^2\alpha + D_{\alpha'}^2 \cos^2\alpha' = 1 : \sigma_1, \quad D_\alpha^2 \sin^2\alpha + D_{\alpha'}^2 \sin^2\alpha' = 1 : \sigma_2$$

oder, die Summe der Quadrate der Projektionen zweier konjugierter Halbmesser auf einer Achse gibt das Quadrat der betreffenden Halbachse.

Addiert man beide Gleichungen, so ergibt sich

$$D_\alpha^2 + D_{\alpha'}^2 = \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2}$$

oder die Summe der Quadrate zweier konjugierter Halbmesser ist konstant, sie ist gleich der Summe der Quadrate der Halbachsen.

Bei der Hyperbel ist die Länge der einen Achse imaginär. Da die Summe der Quadrate der Projektion konjugierter Halbmesser auf die imaginäre Achse negativ, auf die andere positiv ist, so muß von den konjugierten Halbmessern immer einer imaginär, der andere reell sein. Die eben ausgesprochenen Sätze haben daher im Grunde nur für die Ellipse eine geometrische Bedeutung.

Aus der Gleichung

$$D_\alpha D_{\alpha'} \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} (\cos\alpha \sin\alpha' - \sin\alpha \cos\alpha') = \cos^2\omega + \sin^2\omega = 1,$$

$$D_\alpha D_{\alpha'} \sin(\alpha' - \alpha) = 1 : \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$$

folgt, daß das aus zwei konjugierten Durchmessern gebildete Parallelogramm einen konstanten Inhalt hat, was wieder nur für die Ellipse eine eigentliche geometrische Bedeutung hat.

Es folgt noch

$$D_\alpha^2 \cos\alpha \sin\alpha + D_{\alpha'}^2 \cos\alpha' \sin\alpha' = 0.$$

Ferner ist

$$1 : D_\alpha^2 = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha = \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)\sin^2\alpha,$$

woraus man die Maximal- bez. Minimaleigenschaften der Achsenquadrate leicht erkennt.

Bei der Ellipse sind die Achsen größte und kleinste Durchmesser, in allen Fällen sind die Achsen Symmetrieachsen. Aus den Achsengleichungen macht man sich leicht eine rohe Vorstellung von den Kurven.

Die Summe der reziproken Quadrate zweier aufeinander senkrechter (also im allgemeinen nicht konjugierter) Durchmesser ist konstant.

Die Ebene E' sei gegen die Ebene E unter dem Winkel φ geneigt, die Achse der Ebenen E, E' sei in der einen die x'-, in der anderen die x-Achse, und die auf ihnen senkrechten y'- und y-Achsen gehen durch einen gemeinsamen Punkt. Projiziert man nun orthogonal den Kreis $\sigma x'^2 + \sigma y'^2 - 1 = 0$ der Ebene E' in die Ebene E, so wird jedes $x' = x$ jedes $y' = y\cos\varphi$. Die Ordinaten werden sämtlich in demselben Verhältnisse verlängert, und die Gleichung der Kurve in E wird $\sigma x^2 + \sigma\cos^2\varphi y^2 - 1 = 0$. Dadurch, daß die Ellipse sich als die Projektion eines Kreises darstellt, erhält man eine vollkommene Vorstellung von ihr. Auch zieht man hieraus leicht den Satz, daß der Inhalt einer Ellipse mit Halbachsen a, b gleich $ab\pi$ ist, wenn die Formel für den Kreisinhalt als bekannt vorausgesetzt wird.

§ 104. Zieht man in den Endpunkten der Achsen, in den Scheiteln einer Ellipse die Tangenten, so bilden sie ein Rechteck, dessen Diagonalen die Gleichungen haben

$$x\sqrt{\sigma_1} - y\sqrt{\sigma_2} = 0, \quad x\sqrt{\sigma_1} + y\sqrt{\sigma_2} = 0$$

Sie sind einander nach § 101 konjugiert und haben, wie die Symmetrie lehrt, als Durchmesser gleiche Längen.

Die auf zwei konjugierte Durchmesser DD' als ein schiefes Koordinatenkreuz bezogene Gleichung der Mittelpunktskurve ist

$$\left(\frac{x}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D'}\right)^2 - 1 = 0,$$

wenn DD' die halben Längen der Durchmesser sind. Da es bei der Ellipse möglich ist, $D' = D$ zu wählen, so läßt sich ihre Gleichung in schiefen Koordinaten auf die Form $x^2 + y^2 = D^2$ bringen, also auf die Form der Gleichung eines Kreises in rechtwinkligen Koordinaten.

Das Produkt der Entfernungen eines Punktes der Hyperbel von ihren Asymptoten ist konstant. Denn die Gleichung der Asymptoten in der Normalform ist

$$\frac{x\sqrt{\sigma_1} - \sqrt{-\sigma_2}\,y}{\sqrt{\sigma_1 - \sigma_2}} = 0, \quad \frac{x\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{-\sigma_2}\,y}{\sqrt{\sigma_1 - \sigma_2}} = 0,$$

und das Produkt derselben durch die Gleichung der Hyperbel reduziert ist

$$\frac{x^2\sigma_1 + y^2\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2}.$$

Ist φ der Asymptotenwinkel, $\sin\varphi = 2\sqrt{-\sigma_1\sigma_2} : (\sigma_1 - \sigma_2)$, so sind

$$\xi = \frac{x\sqrt{\sigma_1} - y\sqrt{-\sigma_2}}{(\sigma_1 - \sigma_2)\sin\varphi}, \quad \eta = \frac{x\sqrt{\sigma_1} + y\sqrt{-\sigma_2}}{(\sigma_1 - \sigma_2)\sin\varphi} = \frac{x\sqrt{\sigma_1} + y\sqrt{\sigma_2}}{2\sqrt{-\sigma_1\sigma_2}}$$

die Seiten eines Parallelogramms in dem der Asymptotenschnittpunkt und der Punkt xy gegenüberliegende Ecken sind. Sie sind die Koordinaten in einem im allgemeinen schiefen Koordinatensystem, dessen Kreuz aus den Asymptoten gebildet wird. Die Gleichung der Hyperbel in diesem System ist $\xi\eta = 1 : (\sigma_1 - \sigma_2)\sin^2\varphi = (\sigma_2 - \sigma_1) : 4\sigma_1\sigma_2$. Ist $\sigma_2 = -\sigma_1$, so stehen die Asymptoten senkrecht aufeinander, die Hyperbel heißt gleichseitig.

§ 105. Die Tangente. Genügt die Gerade

$$x = \xi + s\cos\alpha, \quad y = \eta + s\sin\alpha$$

den Bedingungen, daß ξ, η auf der Kurve liegt ($M(\xi, \eta) = 1$) und die Gleichungen befriedigt,

$$\sigma_1 \xi \cos\alpha + \sigma_2 \eta \sin\alpha = 0,$$

so trifft sie die Kurve nur einmal, nämlich für $s = 0$, sie ist Tangente. Eliminiert man $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, so erhält man als Gleichung der Tangente

$$\sigma_1 \xi x + \sigma_2 \eta y = 1.$$

Setzt man

$$\sigma_1 \xi = \mu \cos\lambda,\ \sigma_2 \eta = \mu \sin\lambda,\ \sigma_1 \xi^2 = \mu^2 \cos^2\lambda : \sigma_1,\ \sigma_2 \eta^2 = \mu^2 \sin^2\lambda : \sigma_2,$$

$$\sigma_1 \xi^2 + \sigma_2 \eta^2 = 1 = \mu^2 \left(\frac{\cos^2\lambda}{\sigma_1} + \frac{\sin^2\lambda}{\sigma_2}\right),$$

so erhält man als Gleichung der Tangente in der Normalform

$$x \cos\lambda + y \sin\lambda - \varrho = 0,\ \varrho = \sqrt{\frac{\cos^2\lambda}{\sigma_1} + \frac{\sin^2\lambda}{\sigma_2}}.$$

Es gibt zwei Tangenten gleicher Richtung, weil ϱ positiv oder negativ genommen werden kann.

Die Summe der Quadrate der Entfernungen des Mittelpunktes von zwei aufeinander senkrechten Tangenten ist konstant $= (\sigma_1 + \sigma_2) : \sigma_1 \sigma_2$. Der Ort der Schnittpunkte auf einander senkrechter Tangenten ist ein Kreis. (Scheinbare Größe gleich $\frac{1}{2}\pi$). Der Radius dieses Kreises ist $\sqrt{\sigma_1 + \sigma_2} : \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$.

Die Tangenten durch die Endpunkte konjugierter Halbmesser D, D' haben die Gleichungen

$$D x \sigma_1 \cos\alpha + D y \sigma_2 \sin\alpha = 1,\quad D' x \sigma_1 \cos\alpha' + D' y \sigma_2 \sin\alpha' = 1.$$

Quadriert und addiert man, so folgt

$$x x \sigma_1 + y y \sigma_2 = 2.$$

Es bestimmen daher diese Tangenten durch ihre Schnittpunkte eine Kurve, deren Gleichung sich von der der Mutterkurve nur im konstanten Gliede unterscheidet. Daß solche Kurven einander ähnlich sind, wird sich später zeigen. Die Halbachsen $\sqrt{2 : \sigma_1}$, $\sqrt{2 : \sigma_2}$ sind denen der Mutterkurve proportional.

§ 106. Soll die Tangente durch einen absoluten Punkt gehen, so läßt sich ihre Gleichung nicht in die Normalform setzen. Ihre Gleichung hat aber die Form $x + yi = c$. Diese Gerade soll die Kurve nur einmal treffen. Eliminiert man x, so muß sich für y eine Gleichung ergeben, die nur eine Wurzel hat, die ein vollständiges Quadrat ist. Diese Elimination ergibt

$$y^2(\sigma_2 - \sigma_1) - 2ciy\sigma_1 + c^2\sigma_1 - 1 = 0.$$

Diese Gleichung ist ein vollständiges Quadrat, wenn

$$(c^2\sigma_1 - 1)(\sigma_2 - \sigma_1) + c^2\sigma_1{}^2 = c^2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1 - \sigma_2 = 0$$

ist. Es ist also $c = \sqrt{\sigma_2 - \sigma_1} : \sqrt{\sigma_1\sigma_2}$, und es gibt zwei solche Tangenten, weil die Wurzel positiv oder negativ genommen werden kann. Die Tangente, die den anderen absoluten Punkt enthält, erhält man, wenn man $-i$ für i setzt. Von den Schnittpunkten dieser Tangenten (so wie überhaupt von ihren Punkten) sind nur zwei reell, die, wenn $1 : \sigma_1 > 1 : \sigma_2$ ist, die Koordinaten haben

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}}, \quad y = 0.$$

Diese Punkte heißen Brennpunkte. Definiert man sie als die Schnittpunkte der von den absoluten Punkten an die Kurve gezogenen Tangenten, so gibt es deren vier,

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}}, \quad y = 0; \quad y = \pm i\sqrt{\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}}, \quad x = 0,$$

sie liegen auf den Achsen. Aber nur zwei davon sind reell, die auf der großen bezw. reellen Achse, also hier auf der x-Achse liegenden. Die Entfernung eines reellen Brennpunktes von einem Punkte der Kurve ist

$$\sqrt{\left(x \pm \sqrt{\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}}\right)^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{x^2\sigma_1\left(\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}\right) \mp 2x\sqrt{\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}} + \frac{1}{\sigma_1}}$$

$$= \sqrt{\left(x\sqrt{\sigma_1}\sqrt{\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}} \mp \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}}\right)^2}.$$

Ziehen wir die Quadratwurzel aus (Rationalität der Entfernungen), so sind dafür bei der Ellipse die Ausdrücke

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} - x\sqrt{\sigma_1}\sqrt{\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} + x\sqrt{\sigma_1}\sqrt{\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}}$$

als stets positive Größen zu wählen. Es fließt aus ihnen der bekannte Satz, bei der Ellipse ist die Summe der Brennstrahlen konstant, der zu einer bekannten Fadenkonstruktion Veranlassung gibt. Setzt man wie üblich $1 : \sigma_1 = a^2$, $1 : \sigma_2 = b^2$, $\sqrt{a^2 - b^2} = e$ $(a > b)$, so sind die Entfernungen eines Kurvenpunktes von den Brennpunkten

$$a - ex, \quad a + ex.$$

Die Ordinate des Brennpunktes $b^2 : a$ wird der Parameter der Ellipse genannt.

Bei der Hyperbel sind für solche positive x, denen reelle y zugehören, die Ausdrücke

$$x\sqrt{\sigma_1}\sqrt{\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}} - \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}}, \quad x\sqrt{\sigma_1}\sqrt{\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}} + \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}}$$

positiv, für negative x sind die Ausdrücke

$$-x\sqrt{\sigma_1}\sqrt{\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}} - \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}}, \quad -x\sqrt{\sigma_1}\sqrt{\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}} + \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}}$$

positiv. In beiden Fällen ist die Differenz der Brennstrahlen gleich $2 : \sqrt{\sigma_1}$. Auch hieraus fließt eine Fadenkonstruktion. Durch die Gleichung $r' - r = c$ in Bipolarkoordinaten wird nur ein Hyperbelzweig dargestellt. — Die Größe

$$\sqrt{\sigma_1}\sqrt{\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}} = e,$$

die Abszisse des Brennpunktes dividiert durch die zugehörige Halbachse heißt numerische Exzentrizität. Setzt man bei der Ellipse $\sigma_1 = 1 : a^2$, $\sigma_2 = 1 : b^2$, bei der Hyperbel $\sigma_1 = 1 : a^2$, $\sigma_2 = -1 : b^2$, so daß die Gleichungen dieser Kurven die Formen annehmen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

so werden die numerischen Exzentrizitäten bez. $\sqrt{a^2 - b^2} : a$, $\sqrt{a^2 + b^2} : a$.

Schlägt man in der Ellipse vom Scheitel der kleinen Achse b als Mittelpunkt mit der großen Halbachse a als Radius einen Kreis, so trifft derselbe die große Achse in den Brennpunkten, die die Abszissen ae, $-ae$ haben.

§ 107. Der Ellipsenzieher. Bewegt sich eine Strecke s so, daß ihre Endpunkte stets auf zwei sich senkrecht schneidenden Geraden, den Koordinatenachsen liegen, so beschreibt jeder Punkt dieser Strecke oder ihrer Verlängerung eine Ellipse. — Die Strecke treffe die x-Achse im Punkte ξ, die y-Achse im Punkte η, so sind die Koordinaten eines ihrer Punkte

$$x = p\xi : (p + q), \quad y = q\eta : (p + q),$$

woraus folgt $\xi = x(p+q):p$, $\eta = y(p+q):q$, und da $\xi^2 + \eta^2 = s^2$ sein soll,

$$s^2 = \frac{x^2(p+q)^2}{p^2} + \frac{y^2(p+q)^2}{q^2},$$

was die Gleichung einer Ellipse ist.

§ 108. Die folgenden Sätze werden dem Leser zu beweisen überlassen.

Das Produkt der Brennstrahlen eines Punktes der Ellipse ist dem Quadrate des dem Radius vektor dieses Punktes konjugierten Halbmessers gleich.

Das Produkt der Lote von den Brennpunkten auf eine (bewegliche) Tangente ist konstant, nämlich gleich $1 : \sigma_2$.

Der Ort der Fußpunkte der von einem Brennpunkte auf die Tangenten gefällten Lote ist ein der Kurve konzentrischer Kreis, dessen Durchmesser bei der Ellipse die große, bei der Hyperbel die reelle Achse ist. — Bei der Parabel ist derselbe Ort die Scheiteltangente.

§ 109. Es ist besonders in der Astronomie wichtig, die Kegelschnitte in Polarkoordinaten darzustellen, deren Pol ein Brennpunkt ist. Die Entfernung eines Punktes vom Pol sei r

und der Winkel, den r mit dem nächstliegenden Scheitelvector (Perihel) bildet, die wahre Anomalie genannt, sei w. So ist bei der Ellipse $r \cos w = x - ae$, $r = a - ex$, woraus folgt

$$r = a(1 - e^2) : (1 + e \cos w).$$

Die Gleichung der Hyperbel, oder vielmehr eines Zweiges derselben ist

$$r = a(e^2 - 1) : (1 + e \cos w),$$

die der Parabel

$$r = p : (1 + \cos w).$$

Zu einem Koordinatenpaare r, w gehört ein Punkt. Zu einem Punkte gehören unendlich viele Koordinatenpaare, weil der Winkel w nur bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt ist.

§ 110. Darstellung des Ellipseninhalts durch die drei Dreiecke, die vom Mittelpunkte der Ellipse und den Ecken eines Tangentendreiecks gebildet werden. Eine bekannte Formel der Trigonometrie

$$4 \sin \varphi \sin \varphi' \sin \varphi'' = -\sin(\varphi + \varphi' + \varphi'')$$
$$+ (\sin - \varphi + \varphi' + \varphi'') + \sin(\varphi - \varphi' + \varphi'') + \sin(\varphi + \varphi' - \varphi'')$$

ergibt, wenn $\varphi + \varphi' + \varphi'' = 2\pi$, $-\varphi + \varphi' + \varphi'' = 2\pi - 2\varphi$ usw. ist

$$\sin 2\varphi + \sin 2\varphi' + \sin 2\varphi'' = -4 \sin \varphi \sin \varphi' \sin \varphi''.$$

Es sei eine Ellipse $(x^2 : a^2) + (y^2 : b^2) = 1$ gegeben und

$$t, \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha - \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha} = 0,$$
$$t', \quad x \cos \alpha' + y \sin \alpha' - \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha' + b^2 \sin^2 \alpha'} = 0,$$
$$t'', \quad x \cos \alpha'' + y \sin \alpha'' - \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha'' + b^2 \sin^2 \alpha''} = 0,$$

seien drei Tangenten derselben, t, t', t'' mögen zugleich die Längen der Seiten des Dreiecks bedeuten, das die drei Tangenten bilden, und $pp'p''$ sollen die vom Mittelpunkte auf die Tangenten gefällten Lote bezeichnen. Ferner seien

$$\varphi = \alpha'' - \alpha', \quad \varphi' = \alpha - \alpha' + 2\pi, \quad \varphi'' = \alpha' - \alpha$$

die Winkel, die bez. die Lote $p'p''$, $p''p$, pp' miteinander bilden. So ist

$$p^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha, \quad p'^2 = a^2 \cos^2 \alpha' + b^2 \sin^2 \alpha'^2,$$
$$p''^2 = a^2 \cos^2 \alpha'' + b^2 \sin^2 \alpha''.$$

Zur Abkürzung werde $a^2 + b^2 = \sigma$, $a^2 - b^2 = \delta$ gesetzt. Dann ist

1) $\sigma + \delta \cos 2\alpha = 2p^2, \quad \sigma + \delta \cos 2\alpha' = 2p'^2, \quad \sigma + \delta \cos 2\alpha'' = 2p''^2.$

Multipliziert man diese Gleichungen bez. mit

$$\sin 2(\alpha'' - \alpha') = \sin 2\varphi, \quad \sin 2(\alpha - \alpha'') = \sin 2\varphi',$$
$$\sin 2(\alpha' - \alpha) = \sin 2\varphi''$$

und addiert, so folgt

2) $p^2 \sin\varphi \cos\varphi + p'^2 \sin\varphi' \cos\varphi' + p''^2 \sin\varphi'' \cos\varphi'' =$
$$- \sigma \sin\varphi \sin\varphi' \sin\varphi''.$$

Durch Subtraktion je zweier der unter 1) verzeichneten Gleichungen erhält man weiter

$$\delta(\cos 2\alpha - \cos 2\alpha') = 2(p^2 - p'^2) \text{ usw.}$$

oder

3) $\delta \sin\varphi \sin(\alpha' + \alpha'') = p^2 - p'^2, \quad \delta \sin\varphi' \sin(\alpha'' + \alpha) = p'^2 - p''^2,$
$$\delta \sin\varphi'' \sin(\alpha + \alpha') = p''^2 - p^2.$$

Hieraus folgt durch Erheben aufs Quadrat

3a) $$\delta^2 - \delta^2 \cos 2(\alpha' + \alpha'') = \frac{2(p'^2 - p''^2)^2}{\sin^2\varphi},$$
$$\delta^2 - \delta^2 \cos 2(\alpha'' + \alpha) = \frac{2(p''^2 - p'^2)^2}{\sin^2\varphi'},$$
$$\delta^2 - \delta^2 \cos 2(\alpha + \alpha') = \frac{2(p'^2 - p^2)^2}{\sin^2\varphi''}.$$

Multipliziert man die unter 3a) stehenden Gleichungen bez. mit

$$\sin 2\varphi = \sin 2(\alpha + \alpha'' - \alpha' - \alpha), \quad \sin 2\varphi' = \sin 2(\alpha' + \alpha - \alpha'' - \alpha'),$$
$$\sin 2\varphi'' = \sin 2(\alpha'' + \alpha' - \alpha - \alpha'')$$

und addiert, so ergibt sich

$$\delta^2(\sin 2\varphi + \sin 2\varphi' + \sin 2\varphi'') = -4\delta^2 \sin\varphi \sin\varphi' \sin\varphi'' =$$
$$4(p''^2 - p'^2)^2 \operatorname{ctg}\varphi + 4(p^2 - p'^2)^2 \operatorname{ctg}\varphi' + (p'^2 - p^2)^2 \operatorname{ctg}\varphi'',$$

oder wenn man nochmals mit $\sin\varphi \sin\varphi' \sin\varphi''$ multipliziert und nach Potenzen der p ordnet

4) $$\delta^2 \sin^2\varphi \sin^2\varphi' \sin^2\varphi'' =$$
$$p^4 \sin^2\varphi + p'^4 \sin^2\varphi' + p''^4 \sin^2\varphi'' + 2p'^2 p''^2 \cos\varphi \sin\varphi' \sin\varphi''$$
$$+ 2p''^2 p^2 \cos\varphi' \sin\varphi'' \sin\varphi + 2p^2 p'^2 \cos\varphi'' \sin\varphi \sin\varphi'.$$

Zieht man diese Gleichung von der unter 2) verzeichneten Gleichung, nachdem man sie aufs Quadrat erhoben hat, ab, so erhält man endlich

5) $$(\sigma^2 - \delta^2) \sin^2\varphi \sin^2\varphi' \sin^2\varphi'' = 4a^2b^2 \sin^2\varphi \sin^2\varphi' \sin^2\varphi'' =$$
$$- p^4 \sin^4\varphi - p'^4 \sin^4\varphi' - p''^4 \sin^4\varphi'' + 2p'^2 p''^2 \sin^2\varphi' \sin^2\varphi''$$
$$+ 2p''^2 p^2 \sin^2\varphi'' \sin^2\varphi + 2p^2 p'^2 \sin^2\varphi \sin^2\varphi'.$$

Im Dreiecke verhalten sich die Seiten wie die sinus der gegenüberliegenden Winkel. Es ist deshalb

$$t = \lambda \sin\varphi, \quad t' = \lambda \sin\varphi', \quad t'' = \lambda \sin\varphi''.$$

Ferner sei

$$\Delta = \tfrac{1}{2} p t, \; \Delta' = \tfrac{1}{2} p' t', \; \Delta'' = \tfrac{1}{2} p'' t'',$$
$$D = \Delta + \Delta' + \Delta'' = \tfrac{1}{2} t t' \sin\varphi'' = \tfrac{1}{2} t t'' \sin\varphi',$$

so ergibt sich aus 5)

$$4a^2b^2t^2t't'' \sin\varphi' \sin\varphi'' = 16a^2b^2D^2 =$$
$$-16\Delta^4 - 16\Delta'^4 - 16\Delta''^4 + 32\Delta'^2\Delta''^2 + 32\Delta''^2\Delta^2 + 32\Delta^2\Delta'^2$$
$$= 16D(\Delta + \Delta' - \Delta'')(\Delta - \Delta' + \Delta'')(-\Delta + \Delta' + \Delta''),$$

oder

6) $$ab\pi = \pi \frac{\sqrt{\Delta + \Delta' + \Delta'' \cdot \Delta + \Delta' - \Delta'' \cdot \Delta - \Delta' + \Delta'' \cdot -\Delta + \Delta' + \Delta''}}{D}.$$

Wären $\Delta\Delta'\Delta''$ Strecken, deren Summe D gegeben ist, so wäre nach der heronischen Dreiecksformel unser Ausdruck dem Inhalte des aus diesen Strecken gebildeten Dreiecks, dessen Umfang D wäre, proportional, und der Inhalt wäre am größten, wenn das Dreieck gleichseitig ist. Daraus folgt, daß für die größte dem Dreieck $tt't''$ eingeschriebene Ellipse $\Delta = \Delta' = \Delta'' = \frac{1}{3}D$ sein muß, und daß ihr Mittelpunkt mit dem Schwerpunkte des

Dreiecks zusammenfällt. Die Symmetrie ergibt, da der Mittelpunkt gefunden ist, drei weitere Tangenten. Aber schon durch fünf Tangenten ist die Ellipse, wie später aus dem Satz von Brianchon folgt, bestimmt.

§ 111. Die Gleichung der Parabel bezogen auf die schiefen Koordinaten, die ein Durchmesser und die ihm konjugierte Tangente bilden, wenn diese unter dem Winkel α gegen die Durchmesser geneigt ist, hat die Form (vgl. § 160)

$$y^2 = 2px \operatorname{cosec}^2 \alpha.$$

Die Gleichung einer Tangente im Punkte $\xi\eta$ der Parabel ist

$$y\eta - p(x + \xi) = 0.$$

Diese Formel wird später allgemeiner erwiesen.

§ 112. Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades. Eliminiert man aus den beiden Gleichungen

$$x^2 = 2y, \quad x^2 + y^2 - 2bx - 2(a+1)y = 0$$

y, so folgt mit Unterdrückung des Faktors $\frac{1}{4}x$:

$$x^3 - 4ax - 8b = 0.$$

Die Abszissen der von $x = 0$, $y = 0$ verschiedenen Schnittpunkte der Parabel $x^2 = 2y$ und des Kreises mit dem Mittelpunkte $x_m = b$, $y_m = a + 1$ und dem Radius $\sqrt{(1+a)^2 + b^2}$ sind die Wurzeln der Gleichung dritten Grades $x^3 - 4ax - 8b = 0$.

Beispiel: Trisektion eines Winkels. Sie hängt von der Gleichung ab

$$(4 \cos \tfrac{1}{3}\varphi)^3 - 4 \cdot 3(4 \cos \tfrac{1}{3}\varphi) - 8 \cdot 2 \cos \varphi = 0.$$

$$x = 4 \cos \tfrac{1}{3}\varphi, \quad a = 3, \quad b = 2 \cos \varphi.$$

Es ist $\cos \varphi$ als eine Linienstrecke anzusehen. Die Konstruktion gibt für $\cos \frac{1}{3}\varphi$ ebenfalls eine Strecke.

Im Delischen Problem (Verdoppelung des Würfels) ist $a = 0$, $b = \frac{1}{4}$.

§ 113. Eliminiert man aus den Gleichungen

$$x^2 = my, \quad x^2 + y^2 - qx - (p + m)y - rm = 0$$

y, so erhält man die Gleichung

$$x^4 = mpx^2 + m^2qx + m^3r.$$

Die Abszissen der Schnittpunkte der Parabel und des Kreises sind die Wurzeln dieser Gleichung vierten Grades.

Da man $m = 2$ annehmen kann, so erkennt man, daß eine einzige Parabel, die gezeichnet vorliegen muß, genügt, um mit ihr und mit Zirkel und Lineal alle Gleichungen dritten und vierten Grades auflösen zu können.

Kegelschnitte durch fünf Punkte.

Da die Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung fünf wesentliche Konstanten enthält, so ist sie im allgemeinen durch fünf Punkte bestimmt. Dies soll jedoch genauer untersucht werden.

§ 114. Enthält ein Kegelschnitt eine Gerade, so enthält er noch eine zweite, die in besonderen Fällen mit der ersten zusammenfallen kann. Macht man durch eine Drehung des Koordinatensystems, die Gerade zur x-Achse, so muß die Gleichung des Kegelschnittes für jedes x verschwinden, wenn $y = 0$ gesetzt wird, es muß also jedes von y freie Glied fehlen, die Gleichung muß die Form haben $y(Ax + By + C) = 0$, die Kurve muß in zwei gerade Linien zerfallen.

Wir wissen aus § 86, daß wenn eine Gerade drei Punkte mit einem Kegelschnitte gemein hat, sie ganz in die Kurve fällt, die alsdann aus zwei Geraden besteht. Wenn demnach von fünf gegebenen Punkten drei auf einer Geraden G liegen, die beiden anderen nicht, so ist die Kurve zweiter Ordnung durch sie völlig bestimmt, sie besteht aus G und der die beiden anderen Punkte verbindenden Geraden.

Wenn aber vier Punkte auf G liegen, so gibt es eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Kurven zweiter Ordnung durch

sie, sie bestehen aus der Geraden G und einer beliebigen Geraden durch den fünften Punkt. Liegen alle fünf Punkte auf G, so gibt es eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit durch sie, G plus einer beliebigen Geraden. Das sind, wie sich sogleich zeigt, die beiden einzigen Fälle, in denen durch fünf Punkte ein Kegelschnitt nicht vollständig bestimmt ist.

Nachdem diese Fälle erledigt sind, dürfen wir annehmen, daß von den gegebenen fünf Punkten keine drei in einer Geraden liegen. — Man kann durch fünf Punkte immer einen Kegelschnitt legen. Durch je zwei von vier derselben denke man gerade Linien gezogen $G_{12} = 0$, $G_{23} = 0$, $G_{34} = 0$, $G_{41} = 0$ und die Formen G_{12}, G_{23}, ... nehmen für den fünften Punkt g' die Werte G'_{12}, G'_{23}, ... an. Dann geht

$$F = G_{12} G_{34} G'_{23} G'_{41} - G'_{12} G'_{34} G_{23} G_{41} = 0$$

durch die fünf Punkte. (Liegen vier Punkte auf einer Geraden, so ist diese Form F identisch 0, dann ist ja aber auch der Kegelschnitt unbestimmt.)

Durch fünf Punkte, von denen keine drei in einer Geraden liegen, ist nur ein Kegelschnitt möglich, denn gäbe es zwei verschiedene, $F = 0$, $F' = 0$, so wäre $\mu F - \lambda F' = 0$ ein Büschel, dessen einzelne Kurven alle durch die fünf Punkte gehen. Ist nun $x_0 y_0$ ein im Endlichen liegender Schnittpunkt der Verbindungslinien zweier Paare der fünf Punkte, so ist

$$F(x, y) F'(x_0, y_0) - F'(x, y) F(x_0, y_0) = 0$$

ein Kegelschnitt, der die beiden genannten Verbindungslinien ganz und außerdem noch einen davon verschiedenen, den gegebenen fünften Punkt enthält. Das ist aber offenbar nicht möglich. Es gibt nur einen Kegelschnitt durch die fünf Punkte.

§ 115. Pascalscher Satz. Liegen sechs Punkte $g_1 g_2 g_3 g_4 g' g''$ in einem Kegelschnitt, so erfüllen sie geometrisch eine lineare Bedingung, die man den Pascalschen Satz nennt. Die Gleichungen

$$G_{12} G_{34} G_{23}' G_{41}' - G_{12}' G_{34}' G_{23} G_{41} = 0,$$
$$G_{12} G_{34} G_{23}'' G_{41}'' - G_{12}'' G_{34}'' G_{23} G_{41} = 0,$$

bedeuten denselben Kegelschnitt, wenn eben die sechs Punkte auf einem Kegelschnitt liegen und es ist demnach

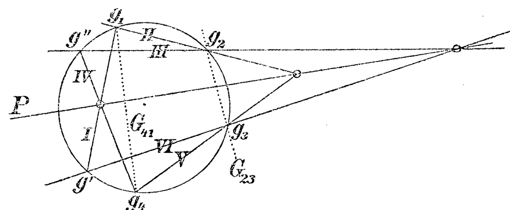
$$G_{12}' G_{34}' G_{23}'' G_{41}'' = G_{12}'' G_{34}'' G_{23}' G_{41}'.$$

Nun sind

$$G_{12} G_{41}' - G_{41} G_{12}' = 0, \quad G_{12} = 0, \quad G_{12} G_{23}'' - G_{12}'' G_{23} = 0,$$
$$G_{34} G_{41}'' - G_{34}'' G_{41} = 0, \quad G_{34} = 0, \quad G_{23} G_{34}' - G_{23}' G_{34} = 0$$

die Gleichungen der Seiten des aus den Punkten $g' g_1 g_2 g'' g_4 g_3$ gebildeten Sechsecksechsseits, die wir der Reihe nach mit *I II III IV V VI* bezeichnen. Eine Gerade $\mathfrak{P}$, die durch den Schnittpunkte von *I IV* und von *II V* hindurchgeht, hat die Gleichung

$$\mathfrak{P} = (G_{12} G_{41}' - G_{41} G_{12}') G_{34}'' - (G_{34} G_{41}'' - G_{34}'' G_{41}) G_{12}'$$
$$= G_{12} G_{41}' G_{34}'' - G_{34} G_{12}' G_{41}'' = 0.$$



Eine Gerade $\mathfrak{A}$, die durch den Schnittpunkt von *II V* und *III VI* hindurchgeht, hat die Gleichung

$$\mathfrak{A} = G_{34}'(G_{12} G_{23}'' - G_{23} G_{12}'') + G_{12}''(G_{23} G_{34}' - G_{23}' G_{34})$$
$$= G_{12} G_{23}'' G_{34}' - G_{34} G_{23}' G_{12}'' = 0.$$

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{P}$ stellen aber dieselbe Gerade dar, weil

$$\mathfrak{A}\, G_{12}' G_{41}'' = \mathfrak{P}\, G_{23}' G_{12}''$$

ist. Hieraus folgt der Satz:

Die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten eines einer Kurve zweiter Ordnung eingeschriebenen Sechsecksechsseits liegen auf einer Geraden *P*, die wir eine Pascalsche Gerade nennen können. — Aus sechs Punkten lassen sich sechzig verschiedene Sechsecksechsseite bilden, also gibt es für sechs Punkte eines Kegelschnittes sechzig Pascalsche Linien, die eine interessante

freilich komplizierte Konfiguration bilden. Man lese darüber „Bauer, Abhandlungen der zweiten Klasse der Akademie der Wissenschaften zu München, Band XI, Abteilung III, 1874“.

§ 116. Lineare Konstruktion eines Kegelschnittes aus fünf Punkten. Der Pascalsche Satz setzt uns in den Stand, punktweise einen Kegelschnitt, von dem fünf Punkte gegeben sind, zu konstruieren. Wir betrachten $g_1 g_2 g'' g_4 g'$ als die gegebenen Punkte, legen durch den letzten g' eine beliebige Gerade VI und suchen auf ihr den Punkt g_3, der dem Kegelschnitte angehört.

Wir bringen die Gerade $I(g'g_1)$ mit $IV(g''g_4)$ zum Schnitt. Dann $III(g_2 g'')$ zum Schnitt mit VI. Die beiden Schnittpunkte bestimmen die Pascalsche Gerade P, die zum gesuchten sechsten Punkte g_3 gehört. Es müssen sich also die Gerade $II(g_2 g_1)$ und die gesuchte Seite V des Sechsecksechsseits auf P schneiden. Der Schnittpunkt ist durch II bestimmt. Verbinden wir diesen Punkt mit g_4, so erhalten wir die Gerade V, die mit VI zusammen den gesuchten Punkt g_3 liefert. Variiert man VI, so erhält man beliebig viele Punkte der Kurve.

§ 117. Konstruktion der Tangente in einem Punkte. Läßt man zwei Punkte, etwa $g_3 g_4$, zusammenfallen, so wird die Gleichung des Kegelschnittes durch die vier Punkte $g' g_1, g_2, g_3$, $g_4 = g_3$

$$G_{12} G_{34} G'_{23} G'_{41} - G_{23} G_{41} G'_{12} G'_{41} = 0,$$

wenn G_{34} eine beliebige g_3 enthaltende Gerade ist. Bringt man diese Gerade mit der Kurve zum Schnitt, so werden die Schnittpunkte durch die gleichzeitigen Gleichungen erhalten

$$G_{34} = 0, \quad G_{23} G_{41} = G_{23} G_{31} = 0.$$

Die Gerade trifft die Kurve nur im Punkte g_3, sie ist Tangente. An der Schlußweise des § 115 ändert sich aber nichts. Wir erhalten so den speziellen Pascalschen Satz.

Bildet man aus fünf Punkten ein Fünfeckfünfseit, und nimmt man als sechste Seite die Tangente in einem der fünf

Punkte hinzu, so daß man gewissermaßen ein Fünfecksechsseit erhält, so schneiden sich ebenfalls die gegenüberliegenden Seiten dieser Figur in drei Punkten einer (Pascalschen) Geraden P.

Daraus ergibt sich sogleich die lineare Konstruktion der Tangente in einem Punkte eines Kegelschnittes, wenn außer ihm noch vier Punkte gegeben sind. — Die Punkte seien $g_1 g_2 g_3 g_4 g_5$ und es seien die Verbindungslinien $g_1 g_2 = I$, $g_2 g_3 = II$, $g_3 g_4 = III$, $g_4 g_5 = IV$, $g_1 g_5 = VI$. Die gesuchte Tangente in g_5 werde als Gerade V gekennzeichnet. So bestimmen die Schnittpunkte von $I\,IV$ und von $III\,VI$ die Pascalsche Linie P auf der sich $II\,V$ schneiden müssen. Die Verbindungslinie des Schnittpunktes $II\,P$ mit g_5 gibt die gesuchte Tangente V.

§ 118. Zwei projektive Strahlenbüschel erzeugen durch die Schnittpunkte entsprechender Strahlen eine Kurve zweiter Ordnung. $GHLM$ seien vier gerade Linien und

$$G + \lambda H = 0, \quad L + \lambda M = 0$$

seien die projektiven Büschel. Für die Schnittpunkte ist $GM - HL = 0$, d. h. sie liegen auf einer Kurve zweiter Ordnung, auf der auch die Büschelträger liegen. Denn der gemeinsame Strahl beider Büschel wird vom entsprechenden eben im Büschelträger getroffen. Ist $L = CG$, wo C eine Konstante ist, so entspricht G in der projektiven Verwandtschaft sich selbst ($\lambda = 0$). Die Kurve zweiter Ordnung zerfällt in zwei gerade Linien, $G(M - CH) = 0$. Die Büschel sind perspektiv. Ist im allgemeinen Falle N der gemeinsame Strahl, so entspricht ihm als Strahl des Büschels $G + \lambda H = 0$ ein Strahl T des andern Büschels, der die Kurve im Punkte (LM) berührt, als Strahl von $G + \lambda M = 0$ entspricht ihm ein Strahl T' des Büschels $G + \lambda H = 0$, der die Kurve im Punkt (GH) berührt. Denn auf T und T' liegt nur je ein Punkt der Kurve.

Projiziert man die Punkte einer Kurve zweiter Ordnung von irgend zweien ihrer Punkte, so erhält man projektive Strahlenbüschel. Denn sind $g_1 g_2 g_3 g_4 g'$ fünf Punkte der Kurve, so ist nach § 115 und in dessen Bezeichnung

$$F = G_{12} G_{34} G_{23}' G_{41}' - G_{12}' G_{34}' G_{23} G_{41} = 0.$$

Diese Gleichung wird auch durch Elimination von λ aus den beiden Gleichungen

$$G_{12}G_{41}' + \lambda G_{14}G_{12}' = 0, \quad G_{23}G_{34}' + \lambda G_{34}G_{23}' = 0$$

erhalten, d. h. die Kurve wird als Schnitt zweier in den Punkten $g_1 g_3$ liegenden projektiver Strahlenbüschel erhalten.

Man sieht daraus, daß durch vier Punkte und die Tangente in einem derselben, oder durch drei Punkte und die Tangente in zwei derselben der Kegelschnitt bestimmt ist. Denn nimmt man im letzten Falle die Berührungspunkte zu Zentren zweier Strahlenbüschel, so bestimmt der dritte Punkt ein Paar entsprechender Strahlen. Dem gemeinsamen Strahl als Strahl des einen Büschels entspricht im andern die Tangente, und der Tangente im ersten Büschel entspricht der gemeinsame Strahl im andern. So sind drei Paare entsprechender Strahlen, und damit (§ 8) die projektive Verwandtschaft der Büschel, die die Kurve erzeugen, bestimmt.

§ 119. Darstellung durch einen Parameter. Löst man die Gleichungen $G + \lambda H = 0$, $L + \lambda M = 0$ nach xy auf, so erhält man Ausdrücke von der Form

$$x : y : 1 = A_1 + B_1\lambda + C_1\lambda^2 : A_2 + B_2\lambda + C_2\lambda^2 : A_3 + B_3\lambda + C_3\lambda^2,$$

die Koordinaten sind Funktionen zweiten Grades eines Parameters λ mit gleichen Nennern. Umgekehrt erhält man durch Elimination von λ, wenn xy in obiger Form gegeben sind, die Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung.

§ 120. Die Gleichung eines Kegelschnittes, der einem Dreiseit GHJ umschrieben ist, hat die Form

$$F = A_1 HJ + A_2 JG + A_3 GH = 0.$$

Die Gerade $A_1 H + A_2 G$ trifft die Kurve nur im Punkt (HG), ist also Tangente in diesem Punkt. Die Seiten des Dreiecks, das der Kurve in den Ecken des Dreiecks GHJ umschrieben ist, haben daher die Gleichungen

$$A_1 H + A_2 G = 0, \quad A_2 J + A_3 H = 0, \quad A_3 G + A_1 J = 0.$$

Die Schnittpunkte dieser Tangenten mit den gegenüberliegenden Seiten des Dreiseits liegen auf der Geraden

$$A_2 A_3 G + A_3 A_1 H + A_1 A_2 J = 0,$$

was als spezieller Fall des Pascalschen Satzes angesehen werden kann.

Durch den Schnittpunkt der Geraden $A_1 H + A_2 G = 0$, $A_2 J + A_3 H = 0$ geht die Gerade

$$A_1 A_3 H + A_2 A_3 G - A_2 A_1 J - A_1 A_3 H = A_1 A_2 A_3 \left(\frac{G}{A_1} - \frac{J}{A_3}\right),$$

also die Geraden

$$\frac{H}{A_2} - \frac{J}{A_3} = 0, \quad \frac{J}{A_3} - \frac{G}{A_1} = 0, \quad \frac{G}{A_1} - \frac{H}{A_2} = 0,$$

deren Summe identisch Null ist, verbinden die Ecken des umschriebenen Dreiecks mit den gegenüberliegenden des eingeschriebenen. Diese Geraden gehen durch einen Punkt, was auch aus dem Satz von Desargues folgt. (Perspektive Dreiecke.)

Man beweise hier den Satz, daß

$$HJ \sin(HJ) + JG \sin(GJ) + GH \sin(HG) = 0$$

den dem Dreiseit GHJ umschriebenen Kreis bedeutet, wenn GHJ in der Normalform gegeben sind.

§ 121. Zwei Kegelschnitte schneiden sich in vier Punkten. Sind $F = 0$ und $F' = 0$ die beiden Kurven, so gibt es in dem Büschel $F + \lambda F' = 0$ mindestens ein Geradenpaar. Denn die Gleichung $|a + \lambda a'| = 0$ ist vom dritten Grade und hat mindestens eine reelle Wurzel. Für diese Wurzel λ zerfällt $F + \lambda F'$ in zwei gerade Linien GH. Die Kurven FF' schneiden sich in denselben Punkten als F und GH. Da aber G und H je zwei Punkte mit der Kurve gemein haben, so haben F und F' vier Punkte miteinander gemein. Ist eine der Geraden Tangente, so berühren sich F und F', der Berührungspunkt muß doppelt gezählt werden. Schneiden sich GH in einem Punkt auf F, so wird sich später zeigen, daß sich FF' ebenfalls in diesem Punkte berühren. Fällt G mit H

zusammen, so berühren sich die Kegelschnitte doppelt, ist aber diese Gerade Tangente an F, so muß dieser Punkt viermal gezählt werden, die Kurven gehen dann eine Berührung dritter Ordnung miteinander ein. Ist G Tangente an F und geht H durch den Berührungspunkt, so gehen die Kurven dort eine Berührung zweiter Ordnung miteinander ein. — Endlich kann noch eine der beiden Geraden ganz in F fallen, so muß sie auch ganz in F' liegen, F und F' haben in diesem Falle unendlich viele Punkte, eine ganze Gerade miteinander gemein und noch einen Punkt, der in besonderen Fällen auch noch auf G liegen kann.

Konzentrische Kreise berühren sich zweimal, nämlich in den absoluten Punkten.

§ 122. Geometrischer Ort der Punkte gleichen Doppelverhältnisses. Wir setzen

$$g_{\mu\nu} = x(y_\mu - y_\nu) + y(x_\nu - x_\mu) + x_\mu y_\nu - x_\nu y_\mu .$$

Alsdann ist

$$\frac{y - y_\nu}{x - x_\nu} - \frac{y - y_\mu}{x - x_\mu} = \frac{g_{\mu\nu}}{(x - x_\mu)(x - x_\nu)} .$$

Die trigonometrische Tangente der Neigung einer Geraden durch die Punkte xy und $x_\mu y_\mu$ gegen die x-Achse ist

$$X_\mu = y - y_\mu : x - x_\mu .$$

Legen wir nun durch den Punkt xy, und je einen der Punkte $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$, $x_4 y_4$ eine Gerade, deren Richtung durch $X_1 X_2 X_3 X_4$ bestimmt ist, so ist das Doppelverhältnis k dieser vier Geraden

$$\frac{X_2 - X_1}{X_3 - X_2} \cdot \frac{X_3 - X_4}{X_4 - X_1} = \frac{g_{12} \cdot g_{34}}{g_{23} \cdot g_{14}}$$

und der Ort aller Punkte xy, die dasselbe Doppelverhältnis $\varkappa$ mit den vier andern durch Projektion derselben bilden, hat die Gleichung

$$g_{12} g_{34} - \varkappa g_{23} g_{14} = 0 .$$

Der Ort aller Punkte, von dem vier feste Punkte unter einem gegebenen Doppelverhältnisse projiziert werden, ist ein Kegelschnitt.

§ 123. Der Schmiegungs- oder Krümmungskreis. Es sei $x'y'$ ein Punkt des Kegelschnittes $\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 - 1 = 0$. Die Koordinaten desselben lassen sich durch einen Parameter t in der Form darstellen

$$x = (1-t^2) : \sqrt{\sigma_1}(1+t^2), \quad y = 2t : \sqrt{\sigma_2}(1+t^2).$$

Ist σ_2 negativ, so muß man für t rein imaginäre Zahlen setzen, um die reellen Punkte der Kurve zu erhalten, was jedoch für unsere Untersuchung ohne Belang ist.

Die Individuen des Kreisbüschels

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 - 2\lambda(xx'\sigma_1 + yy'\sigma_2 - 1) = 0$$

haben mit dem Kegelschnitte die Tangente $\sigma_1 xx' + \sigma_2 yy' - 1 = 0$ gemein, sie berühren ihn. Um die weiteren Schnittpunkte eines Kreises des Büschels mit dem Kegelschnitt zu finden, ersetzen wir die Koordinaten durch ihre Parameterdarstellung, wobei wir den Punkt $x'y'$ dem Parameter t' entsprechen lassen. So erhalten wir die Gleichung

$$\frac{1}{\sigma_1}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{1-t'^2}{1+t'^2}\right)^2 + \frac{4}{\sigma_2}\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{t'}{1+t'^2}\right)^2$$
$$- 2\lambda \frac{(1-t^2)(1-t'^2) + 4tt' - (1+t^2)(1+t'^2)}{(1+t^2)(1+t'^2)} = 0.$$

Sie besitzt den Faktor $4\,(t-t')^2$ und ist nach Unterdrückung desselben noch vom zweiten Grade in t, so daß es außer dem Schnittpunkte $t = t'$ noch zwei andere gibt. Nach Fortschaffung des Nenners ergibt sich die Gleichung

$$\frac{(t+t')^2}{\sigma_1} + \frac{(1-tt')^2}{\sigma_2} + \lambda(1+t^2)(1+t'^2) = 0.$$

Soll von den beiden Schnittpunkten, die sie liefert, noch einer auf t' fallen, so daß der Kreis dort drei Punkte mit dem Kegelschnitt gemein hat, so muß

$$\lambda = -\frac{4\sigma_2 t'^2 + \sigma_1(1 - t'^2)}{\sigma_1\sigma_2(1 + t'^2)^2} = -\frac{\sigma_1 x'^2 + \sigma_2 y'^2}{\sigma_1\sigma_2}$$

genommen werden. Beachtet man noch, daß

$$1 + \lambda\sigma_1 = \frac{\sigma_2(1 - \sigma_2 y'^2) - \sigma_1{}^2 x'^2}{\sigma_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\sigma_2 - \sigma_1)x'^2,$$

$$1 + \lambda\sigma_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(\sigma_1 - \sigma_2)y'^2$$

ist, so ergibt sich als Gleichung für den dreipunktig berührenden Kreis, den Schmiegungs- oder Krümmungskreis, die Form

$$x^2 + y^2 - \frac{2x\sigma_1(\sigma_2 - \sigma_1)x'^3}{\sigma_2} - \frac{2y\sigma_2(\sigma_1 - \sigma_2)y'^3}{\sigma_1} + p = 0,$$

wo $p = (\sigma_1\sigma_2(x'^2 + y'^2) - 2\sigma_1{}^2x'^2 - 2\sigma_2{}^2y'^2) : \sigma_1\sigma_2$ ist.

Die Koordinaten $\xi\eta$ des Mittelpunktes dieses Kreises, des sogenannten Krümmungsmittelpunktes sind

$$\xi = \sigma_1(\sigma_2 - \sigma_1)x'^3 : \sigma_2, \quad \eta = \sigma_2(\sigma_1 - \sigma_2)y'^3 : \sigma_1.$$

Da der Schmiegungskreis nur noch einen Punkt mit dem Kegelschnitte gemein hat, so muß er ihn an der Berührungsstelle durchsetzen, wovon nur die Krümmungskreise der Scheitelpunkte eine Ausnahme machen.

Ähnliche Kurven zweiter Ordnung.

§ 124. Definition der Ähnlichkeit der Kurven zweiter Ordnung. Es seien

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \cdots + a_{33} = 0,$$
$$F'(x, y) = a_{11}'x^2 + \cdots + a_{33}' = 0$$

zwei Kurven zweiter Ordnung, und $\gamma(\xi\eta)$, $\gamma'(\xi'\eta')$ seien zwei Punkte, durch die parallele gerade Linien gelegt werden, deren Schnittpunkte mit FF' bez. gg' sein mögen. Lassen sich die Punkte $\gamma\gamma'$ so wählen, daß die Strecken $\gamma g = s$, $\gamma' g' = s'$ für jede Richtung einander proportional sind, so heißen die Kurven FF' einander ähnlich und ähnlich liegend. Ist $s = s'k$, so heißt k der Vergrößerungs- bez. Verkleinerungsfaktor. Sind die

Strecken einander zwar parallel, aber in entgegengesetztem Sinne, so ist k negativ und die Ähnlichkeit heißt eine indirekte. Ist k Null oder unendlich, so wird sie eine Uneigentliche. Ist k imaginär, so ist sie nur eine analytische. Eine solche findet z. B. statt zwischen den Hyperbeln $xy - k = 0$, $xy + k = 0$. Denn nehmen wir für γ und γ' den Koordinatenanfang, so trifft die Gerade $x = s \cos \alpha$, $y = s \sin \alpha$, die eine Hyperbel, in der Entfernung $\sqrt{k : \sin \alpha \cos \alpha}$, die andere in der Entfernung $\sqrt{-k : \sin \alpha \cos \alpha}$, und das Verhältnis dieser Strecken ist $\sqrt{-1}$.

Die Schnittpunkte der Geraden $x = \xi + s \cos \alpha$, $y = \eta + s \sin \alpha$; $x = \xi' + s' \cos \alpha$, $y = \eta' + s' \sin \alpha$ mit F bez. F' werden aus den Gleichungen gefunden

$$F(\xi, \eta) + 2s[\cos \alpha F_1(\xi, \eta) + \sin \alpha F_2(\xi, \eta)] + s^2 M(\alpha) = 0,$$
$$F'(\xi', \eta') + 2s'[\cos \alpha F_1'(\xi', \eta') + \sin \alpha F_2'(\xi', \eta')] + s'^2 M'(\alpha) = 0,$$

wenn kurz $M(\alpha)$ $M'(\alpha)$ für $M(\cos \alpha, \sin \alpha)$ $M'(\cos \alpha, \sin \alpha)$ geschrieben wird. Soll nun für jedes α $s' = s : k$ sein, so müssen gleichzeitig die Gleichungen bestehen

$$F(\xi, \eta) : M(\alpha) = k^2 F'(\xi', \eta') : M'(\alpha)$$
$$F_1(\xi, \eta) = \lambda k F_1'(\xi', \eta'), \quad F_2(\xi, \eta) = \lambda k F_2'(\xi', \eta'),$$

wo $\lambda = M(\alpha) : M(\alpha') = F(\xi, \eta) : k^2 F'(\xi', \eta')$ ist.

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt

$$a_{11} : a_{12} : a_{22} : \lambda = a_{11}' : a_{12}' : a_{22}' : 1, \quad a_{33}' = a_{33} : \lambda^2,$$

so daß $F(xy) - \lambda F'(xy)$ ein linearer Ausdruck wird, was die Bedeutung hat, daß die Kurven F und F', wenn sie ähnlich sein sollen, dieselben unendlich fernen Punkte haben müssen. Es zeigt sich, daß diese Bedingung auch die ausreichende ist, wenigstens wenn man für den Fall, daß ein eigentlicher mit einem in ein Geradenpaar zerfallenden Kegelschnitt verglichen wird, uneigentliche Ähnlichkeit zuläßt.

Die beiden anderen Gleichungen lassen sich schreiben

$$a_{11}(\xi - k\xi') + a_{12}(\eta - k\eta') + a_{13} - \lambda k a_{13}' = 0,$$
$$a_{21}(\xi - k\xi') + a_{22}(\eta - k\eta') + a_{23} - \lambda k a_{23}' = 0.$$

Die $\xi\eta\xi'\eta' k$ als Unbekannte enthaltenden Gleichungen lassen sich im allgemeinen auflösen, wodurch die obige Bemerkung bestätigt wird. Wir untersuchen jedoch die Sache genauer.

§ 125. Ähnlichkeit der Mittelpunktskurven. Hat eine der Kurven FF' einen und nur einen Mittelpunkt, so hat auch die zweite einen solchen, wenn sie der ersten ähnlich ist. Sind die Koordinaten der Mittelpunkte bez. $x_m y_m, x_m' y_m'$, so folgt aus den beiden letzten Gleichungen

$$\xi - k\xi' = x_m - kx_m', \quad \eta - k\eta' = y_m - ky_m'$$

oder

$$\xi - x_m = k(\xi' - x_m'), \quad \eta - y_m = k(\eta' - y_m'),$$

so daß für jede Lage von γ ein zugeordneter Punkt γ' gefunden werden kann, für welchen die Streckenproportionalität besteht, und sie besteht auch für Strecken zwischen je zwei zugeordneten Punktpaaren. Die Mittelpunkte sind zugeordnete Punkte, können für $\gamma\gamma'$ gewählt werden.

Da $\lambda k^2 F'(\xi', \eta') = F(\xi, \eta)$ ist, so gewinnen wir mittels der Identitäten

$$\begin{aligned} F'(\xi', \eta') &= M'(\xi' - x_m', \eta' - y_m') + |a'| : \alpha_{33}', \\ F(\xi, \eta) &= M[k(\xi' - x_m'), k(\eta' - y_m')] + |a| : \alpha_{33} \\ &= \lambda k^2 M'(\xi' - x_m', \eta' - y_m') + |a| : \alpha_{33} \end{aligned}$$

für k die Beziehungen

$$k^2 = |a| : \lambda^3 |a'|, \quad k = \pm\sqrt{|a| \, a_{11}'^3 : |a'| \, a_{11}^3}.$$

Ist $|a| : |a'| \lambda$ negativ, so ist die Ähnlichkeit nur eine analytische. Nimmt man das Zeichen der Wurzel negativ, so ist die Ähnlichkeit eine indirekte. Ist $|a|$ oder $|a'|$ gleich Null, so ist die Ähnlichkeit eine uneigentliche, eine der Kurven zerfällt in ein Geradenpaar. — Jede Mittelpunktskurve zweiter Ordnung ist sich selbst (direkt und) indirekt ähnlich. Alle Kreise sind einander ähnlich und ähnlich liegend. Für

$$\xi = \frac{x_m \mp k x_m'}{1 \mp k}, \quad \eta = \frac{y_m \mp k y_m'}{1 \mp k}$$

fällt γ auf γ'. Diese beiden Punkte heißen Ähnlichkeitspunkte; der eine der direkten, der andere der indirekten Ähnlichkeit. (Bei Kreisen äußerer und innerer Ähnlichkeitspunkt). In ähnlichen und ähnlich liegenden Mittelpunktskurven sind die Achsen gleich gerichtet und proportional, und umgekehrt.

§ 126. Ähnlichkeit der Parabeln. Ist $\alpha_{33} = \alpha_{33}' = 0$, so müssen die Gleichungen

$$a_{11}(\xi - k\xi') + a_{12}(\eta - k\eta') + a_{13} - \lambda k a_{13}' = 0,$$
$$a_{21}(\xi - k\xi') + a_{22}(\eta - k\eta') + a_{23} - \lambda k a_{23}' = 0$$

eine Folge voneinander oder eine muß identisch Null sein, wenn $\gamma\gamma'$ im Endlichen liegen sollen. Dies findet statt, wenn

$$(a_{13} - \lambda k a_{13}')a_{21} - (a_{23} - \lambda k a_{23}')a_{11} = \alpha_{23} - k\alpha_{23}' = 0$$

gemacht wird.*) Hierdurch ist k eindeutig bestimmt, gleich $\alpha_{23} : \alpha_{23}'$, so daß es bei Parabeln nur eine Art der Ähnlichkeit gibt. Die Achsen ähnlicher und ähnlich liegender Parabeln müssen parallel sein, dies ist die einzige Bedingung (§ 124.) Man kann daher durch Drehung des Koordinatenkreuzes die Gleichungen beider Parabeln in die Formen setzen

$$(y + \beta^2) - 2p(x + \alpha) = 0, \quad (y + \beta'^2) - 2p'(x + \alpha') = 0.$$

Dann findet man $\lambda = 1$, $k = p : p'$. Die Ähnlichkeit ist eine direkte, wenn pp' dasselbe Zeichen haben, eine indirekte, wenn die Parameter entgegengesetzte Zeichen haben. Entsprechende Punkte $\mu\mu'$ befriedigen die Gleichungen

$$p'(\xi + \alpha) = p(\xi' + \alpha'), \quad p'(\eta + \beta) = p(\eta' + \beta')$$

und der Ähnlichkeitspunkt hat die Koordinaten

$$x = (p\alpha' - p'\alpha) : (p' - p), \quad y = (p\beta' - p'\beta) : (p' - p).$$

§ 127. Kurven zweiter Ordnung sind einander ähnlich, ohne ähnlich liegend zu sein, wenn die eine durch eine Drehung

*) Ist $\alpha_{23} = 0$ so ist der Parameter Null, die Parabel wird eine Doppelgerade, die Ähnlichkeit eine uneigentliche.

der andern ähnlich und ähnlich liegend gemacht werden kann. Daraus folgt, daß Mittelpunktskurven einander ähnlich sind, wenn die Achsenlängen proportional sind, und daß alle Parabeln einander ähnlich sind.

Bestehen zwischen zwei Punktfeldern xy, $x'y'$ die Gleichungen $x' = ax + b$, $y' = ay + c$, so ist die hierdurch definierte Verwandtschaft die der Ähnlichkeit in ähnlicher Lage.

Pol und Polare. Büschel zweiter Ordnung. Dualität.

§ 128. Die Gleichung der Tangente im Punkt $\xi\eta$ der Kurve $F = 0$ wird nach der Methode des § 105 gefunden und lautet

$$xF_1(\xi, \eta) + yF_2(\xi, \eta) + F_3(\xi, \eta) = 0.$$

Wir bezeichnen die linke Seite der Kürze halber mit $F(x; \xi)$ und bemerken, daß $F(x; \xi) = F(\xi; x)$, $F(x; x) = F(x, y)$ ist.

Die Tangente in einem Punkte der Kurve ist unbestimmt, wenn gleichzeitig $F_1(\xi\eta) = 0$, $F_2(\xi\eta) = 0$, $F_3(\xi\eta) = 0$ ist, also wenn $\xi\eta$ Mittelpunkt ist und zugleich auf der Kurve liegt. Das hat nur statt, wenn die Kurve in ein Geradenpaar zerfällt, und nur im Schnittpunkte der Geraden. Jede Gerade durch ihn trifft die Kurve nur einmal (oder unendlich oft), der Punkt heißt deshalb ein Doppelpunkt. Ein eigentlicher Kegelschnitt besitzt keinen Doppelpunkt. Der unendlich ferne Punkt der Parabel besitzt nur eine Tangente, in einem Doppelpunkte gibt es zwei.

§ 129. Ist $\xi\eta$ ein beliebiger Punkt, so nennt man die Gerade $F(x; \xi) = 0$ die Polare des Punktes $\xi\eta$ in bezug auf F, und jeder Punkt xy derselben heißt dem Punkt $\xi\eta$ (in bezug auf F) konjugiert. Ist xy konjugiert $\xi\eta$, so ist auch $\xi\eta$ konjugiert xy, mit anderen Worten: Liegt xy auf der Polare von $\xi\eta$, so liegt auch $\xi\eta$ auf der Polare von xy, weil eben $F(x; \xi) = F(\xi; x)$ ist.

Zu jedem Punkt gehört eine bestimmte Polare, sie ist die Tangente, wenn der Punkt auf der Kurve liegt, und nur

wenn der Punkt ein Doppelpunkt ist, ist seine Polare unbestimmt.

Legt man durch den Punkt $\xi\eta$ eine Sekante $x = \xi + s\cos\alpha$, $y = \eta + s\sin\alpha$ und sind $s_1 s_2$ ihre Schnittpunkte mit der Kurve $F(x, y) = 0$, so ist

$$s_1 s_2 = \frac{F(\xi, \eta)}{M(\alpha)}, \quad s_1 + s_2 = \frac{-2[\cos\alpha F_1(\xi, \eta) + \sin\alpha F_2(\xi, \eta)]}{M(\alpha)}.$$

Im Schnittpunkte derselben Geraden mit der Polare $F(x; \xi) = 0$ sei $s = \sigma$, so ist

$$\sigma = -F(\xi, \eta) : [\cos\alpha F_1(\xi, \eta) + \sin\alpha F_2(\xi, \eta)],$$

woraus folgt

$$(s_1 + s_2)\sigma = 2 s_1 s_2.$$

Nach § 21 sind die Punkte $(\xi\eta) s_1 \sigma s_2$ vier harmonische Punkte. Natürlich können $s_1 s_2$ konjugiert imaginär sein.

Man pflegt das gewonnene Resultat kurz so auszudrücken: Ein Punkt ist von seiner Polare durch die Kurve harmonisch getrennt. Alle Punkte, die von einem gegebenen durch eine Kurve zweiter Ordnung harmonisch getrennt sind, liegen auf einer Geraden, der Polare des Punktes für die Kurve. Diese Sätze gelten auch, wenn die Kurve in ein Geradenpaar zerfällt, nur darf der Punkt, von dessen Polare die Rede ist, nicht der Schnittpunkt der beiden Geraden sein. Die Kurve kann auch ideal sein, wie der Kreis $x^2 + y^2 + k^2 = 0$.

Die Polare eines unendlich fernen Punktes ist der Durchmesser, der der durch den unendlich fernen Punkt bestimmten Richtung konjugiert ist. Denn setzt man $\xi = s\cos\alpha$, $\eta = s\sin\alpha$ und läßt s über alle Grenzen wachsen, so erhält man als Gleichung der Polare

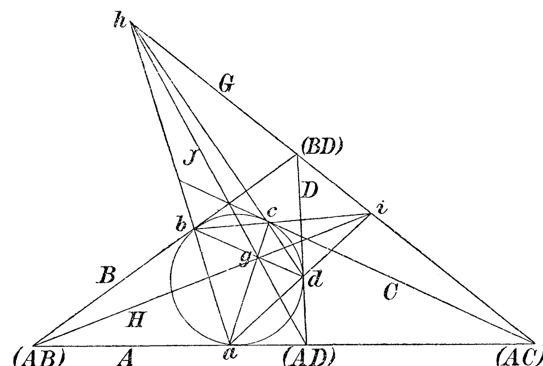
$$\cos\alpha F_1(x, y) + \sin\alpha F_2(x, y) = 0.$$

§ 130. Konstruktion der Polare. Zieht man vom Punkt $\xi\eta$ zwei (reell schneidende) Sekanten an die Kurve $F = 0$, so bestimmen die von $\xi\eta$ verschiedenen Nebenecken des Schnittpunktvierecks die Polare. Dies folgt aus den harmonischen Eigenschaften des Vierecks (vergl. § 37). Sind $g_1 g_2$ die Schnitt-

punkte der ersten Sekante, $g_1'g_2'$ die der zweiten, so kann man g_1' an g_1, g_2' zugleich an g_2 heranführen, die sich auf der Polare schneidenden Geraden g_1g_1', g_2g_2' gehen dadurch in die Tangenten in g_1g_2 über. Zieht man also durch den Punkt $\xi\eta$ eine Sekante und in den Schnittpunkten die Tangenten, so schneiden sich diese auf der Polare. Dies gilt für jede Sekante.

Man erkennt leicht, daß, wenn es von $\xi\eta$ Tangenten an die Kurve gibt, ihre Berührungspunkte auf der Polare liegen, womit die Tangentenkonstruktion gefunden ist. Der Satz wird aber in einem späteren Paragraphen besonders erwiesen werden.

§ 131. Satz von Mac Laurin. Die projektive Geometrie bedient sich, um die Sätze der Dualität zu begründen, des Satzes von Mac Laurin. Die analytische Geometrie benötigt dieses Hilfsmittels nicht. Da aber der Satz auch sonst von Interesse ist, so wird er hier gegeben.



Es seien $abcd$ vier Punkte einer Kurve zweiter Ordnung, und $ABCD$ die Tangenten in diesen Punkten. Die Nebenecken des Vierecks $abcd$ seien ghi, die Nebenseiten des Vierseits $ABCD$ seien GHJ. Dann liegen nach eben erwiesenen Sätzen die Nebenecken gh des Vierecks und die Ecken (AD) (BC) des Vierseits in einer Geraden J, der Polare des Schnittpunktes i von (bc) und (ad). Ebenso liegen gi (AB) (CD) in einer Geraden H, der Polare von h, und hi (BD) (AC) in einer Geraden G, der Polare von g. Es gehen weiter die Nebenseiten JG des

Vierseits und die Seiten ab und dc durch einen Punkt h, eine Nebenecke des Vierecks. Weiter gehen JH (ac) (bd) durch die Nebenecke g und HG (ad) und (bc) durch die Nebenecke i. Es liegen dreimal vier Punkte in einer Geraden und es gehen dreimal vier gerade Linien durch einen Punkt.

Das Dreieck ghi hat die Eigenschaft, daß seine Seiten Polaren der gegenüberliegenden Ecken sind, es ist ein Polardreieck und besteht aus den Nebenecken eines eingeschriebenen Vierecks oder aus den Nebenseiten eines umschriebenen Vierseits.

§ 132. Algorithmus der Polarenbildung. Ist

$$F(x, y) = A'F'(x, y) + A''F''(x, y) + A'''F'''(x, y) + \cdots,$$

so ist

$$F(x; \xi) = A'F'(x; \xi) + A''F''(x; \xi) + A'''F'''(x; \xi) + \cdots$$

Ist

$$F(x, y) = G(x, y)\, H(x, y),$$

so ist

$$F(x; \xi) = \tfrac{1}{2} G(x, y)\, H(\xi, \eta) + \tfrac{1}{2} G(\xi, \eta)\, H(x, y),$$

ist $F(x,y) = G^2(x,y)$, so ist $F(x; \xi) = G(x,y)\, G(\xi,\eta)$. Im letzteren Falle ist die Polare eines Punktes, der nicht auf G liegt, G selbst, die Polare eines Punktes von G ist unbestimmt.

Die Geraden

$$G,\ \tfrac{1}{2} G(xy)\, H(\xi\eta) + \tfrac{1}{2} G(\xi\eta)\, H(xy),$$
$$H,\ \tfrac{1}{2} G(xy)\, H(\xi\eta) - \tfrac{1}{2} G(\xi\eta)\, H(xy),$$

bilden nach § 34 einen harmonischen Strahlenbüschel.

§ 133. Einander zweimal berührende Kegelschnitte. Die Kegelschnitte $F(x, y) + \lambda G^2(x, y) = 0$ bilden einen Büschel, dessen Individuen sich in den Punkten $F = 0$, $G = 0$ berühren Denn die Polare des Punktes $\xi\eta$ in bezug auf ein Individuum des Büschels ist

$$F(x; \xi) + \lambda G(x, y)\, G(\xi, \eta) = 0.$$

Liegt $\xi\eta$ auf G, so ist seine Polare von λ unabhängig,

jeder Punkt von G hat für alle Individuen des Büschels dieselbe Polare. Das gilt auch von den Schnittpunkten $F(\xi, \eta) = 0$, $G(\xi, \eta) = 0$. In diesem Fall ist die Tangente an F Polare, also Tangente eines jeden Individuums des Büschels im Punkte $\xi \eta$. Die Individuen des Büschels berühren sich dort, der Büschel ist ein Büschel sich zweimal berührender Kegelschnitte.

Der Kegelschnittbüschel $F + \lambda HG = 0$, wenn HG gerade Linien sind, die sich auf F schneiden, ist ein Büschel, dessen Individuen durch drei feste Punkte gehen, die durch H und G auf F bestimmt werden, und die sich sämtlich in dem Punkte $G = H = F = 0$ berühren. Denn die Tangente dieses Punktes

$$F(x; \xi) + \tfrac{1}{2} \lambda H(x, y)\, G(\xi, \eta) + \tfrac{1}{2} \lambda\, G(x, y)\, H(\xi, \eta) = F(x; \xi) = 0$$

ist von λ unabhängig. (Vergl. § 121).

§ 134. Die Kegelschnitte $F(x, y) + \lambda F(x; \xi) F(x; \xi) = 0$ bilden nach dem vorigen Paragraphen einen Büschel, dessen Individuen sich in den Punkten berühren, die die Gerade $F(x; \xi) = 0$ mit $F(x, y)$ gemein hat, also in den Schnittpunkten der Polare des Punktes $\xi \eta$ mit der Kurve F, für die $F(x; \xi) = 0$ Polare ist. Der Kegelschnitt dieses Büschels, der durch den Punkt $\xi \eta$ hindurch geht, also

$$F(x, y)\, F(\xi, \eta) - F(x; \xi)\, F(x; \xi) = 0$$

zerfällt in zwei gerade Linien, wie schon geometrisch ersichtlich ist, wie aber auch analytisch daraus folgt, daß diese Gleichung in $x - \xi$, $y - \eta$ homogen geschrieben werden kann, nämlich in der Form

$$M(x - \xi,\; y - \eta)\, F(\xi, \eta) - [(x - \xi)\, F_1(\xi, \eta) + (y - \eta)\, F_2(\xi, \eta)]^2 = 0.$$

Die Polare eines Punktes $\xi \eta$ in bezug auf einen Kegelschnitt $F = 0$ bestimmt also auf F die beiden Punkte, in denen die von $\xi \eta$ an F gezogenen Tangenten berühren, und es gibt von jedem Punkte zwei Tangenten. Sind sie reell, so sagt man, der Punkt liege außerhalb F, sind sie imaginär, so liegt er innerhalb. Wir haben also die Gleichung des Tangentenpaares von $\xi \eta$ an F gewonnen.

§ 135. Die Polaren der Punkte einer Geraden gehen durch einen Punkt. Es sei

$$x_\lambda = (\xi_1 + \lambda \xi_2) : (1 + \lambda), \quad y_\lambda = (\eta_1 + \lambda \eta_2) : (1 + \lambda),$$

so hat die Polare des Punktes $x_\lambda y_\lambda$ die Gleichung

$$x F_1\left(\frac{\xi_1 + \lambda \xi_2}{1 + \lambda}, \quad \frac{\eta_1 + \lambda \eta_2}{1 + \lambda}\right) + y F_2\left(\frac{\xi_1 + \lambda \xi_2}{1 + \lambda}, \quad \frac{\eta_1 + \lambda \eta_2}{1 + \lambda}\right)$$
$$+ F_3\left(\frac{\xi_1 + \lambda \xi_2}{1 + \lambda}, \quad \frac{\eta_1 + \lambda \eta_2}{1 + \lambda}\right)$$
$$= \frac{1}{1 + \lambda}\left[F(x; \xi_1) + \lambda F(x; \xi_2)\right] = 0.$$

Daraus folgt, daß die Polaren der Punkte $x_\lambda y_\lambda$ sämtlich durch die Schnittpunkte der beiden Polaren $F(x; \xi_1) = 0$ $(\lambda = 0)$ und $F(x; \xi_2) = 0$ $(\lambda = \infty)$ hindurch gehen, und daß die Punkte einer Geraden ihren Polaren projektiv zugeordnet sind. Mithin sind konjugierte Punkte auf einer Geraden einander projektiv, und zwar symmetrisch projektiv zugeordnet, oder:

Konjugierte Punkte auf einer Geraden bilden eine Involution, die Schnittpunkte der Geraden mit der Kurve sind die Doppelpunkte, sie können reell oder imaginär sein. Ist die Gerade Tangente, so ist dem Berührungspunkte jeder ihrer Punkte konjugiert, die Involution ist eine uneigentliche. Die Parabel bestimmt auf der unendlich fernen Geraden eine uneigentliche Involution. (Parabolische Involution.)

§ 136. Hauptsatz der Kegelschnittbüschel. Es liegt nicht im Plane dieses Buches, eine vollständige Untersuchung der Kegelschnittbüschel zu liefern. Aber den sogenannten charakteristischen Satz derselben wollen wir an dieser Stelle geben, weil sein Beweis am Wege liegt.

Die Kegelschnitte des Büschels $F(x,y) + \lambda F'(x,y) = 0$ bestimmen auf einer Geraden G eine Involution.

Offenbar bedeutet es (wegen der Möglichkeit der Verlegung des Koordinatenkreuzes) keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir für G die x-Achse $(y = 0)$ annehmen. Dann ist

$$(a_{11} + \lambda a_{11}')x^2 + 2x(a_{13} + \lambda a_{13}') + a_{33} + \lambda a_{33}' = 0$$

die Gleichung, deren Wurzeln die Schnittpunkte des Büschels mit G liefern. Sie bilden nach § 5 eine Involution.

Ist G eine gemeinsame Sekante, so wird diese Gleichung von λ unabhängig, die gemeinsamen Sekanten der Kurven $F=0$ $F'=0$ bilden deshalb eine Ausnahme für diesen Satz. (Vergl. § 58.)

Geht G durch einen gemeinsamen Punkt der Kurven (man mache ihn zum Koordinatenanfang, $a_{33} = a_{33}' = 0$), so wird die Involution eine uneigentliche.

§ 137. Aus der harmonischen Eigenschaft der Polare leitet man ohne Rechnung leicht den Satz ab, daß verschiedene Punkte für dieselbe Kurve zweiter Ordnung verschiedene Polaren haben, und daß es daher umgekehrt zu einer Geraden im Allgemeinen nur einen Punkt gibt, dessen Polare sie ist. Dieser Punkt heißt der Pol der Geraden. Zerfällt F in ein Geradenpaar, so findet die Ausnahme statt, daß zu einer Geraden durch den Schnittpunkt unendlich viele Pole gehören, nämlich alle Punkte der Geraden, die von der gegebenen durch das Geradenpaar $F=0$ harmonisch getrennt ist. (Besonderer Fall: die doppelt zu zählende Gerade.) Um Ausnahmen zu vermeiden, nehmen wir in den nächstfolgenden Paragraphen an, daß $|a|$ nicht Null sei. Soll $G = Ax + By + C = 0$ die Polare des Punktes $\xi\eta$ sein, so muß

$$A = \lambda F_1(\xi, \eta), \quad B = \lambda F_2(\xi, \eta), \quad C = \lambda F_3(\xi, \eta)$$

sein, woraus folgt (die α sind die Adjunkten der a)

$$|a|\xi\lambda = A\alpha_{11} + B\alpha_{21} + C\alpha_{31}, \quad |a|\eta\lambda = A\alpha_{12} + B\alpha_{22} + C\alpha_{32},$$
$$\lambda|a| = A\alpha_{13} + B\alpha_{23} + C\alpha_{33},$$

oder wenn wir

$$\Phi_1(u, v) = \alpha_{11}u + \alpha_{21}v + \alpha_{31}, \quad \Phi_2(u, v) = \alpha_{12}u + \alpha_{22}v + \alpha_{32},$$
$$\Phi_3(u, v) = \alpha_{13}u + \alpha_{23}v + \alpha_{33}$$

setzen,

$$\xi : \eta : 1 = \Phi_1\left(\frac{A}{C}, \frac{B}{C}\right) : \Phi_2\left(\frac{A}{C}, \frac{B}{C}\right) : \Phi_3\left(\frac{A}{C}, \frac{B}{C}\right).$$

Geht die Gerade durch den Koordinatenanfang, so gehe man mit C zur Grenze Null über, um den Pol $\xi\eta$ zu erhalten.

Der Pol ist ein unendlich ferner Punkt, wenn

$$A\alpha_{13} + B\alpha_{23} + C\alpha_{33} = 0$$

ist, also wenn die Gerade G ein Durchmesser ist. Das Verhältnis von ξ zu η ist dann immer ein bestimmtes, der unendlich ferne Punkt ein bestimmter. — Der Pol der unendlich fernen Geraden ($A = 0$, $B = 0$) ist der Mittelpunkt.

Der Pol $\xi\eta$ der Geraden $A(x - x_0) + B(y - y_0)$ wird durch die Gleichungen bestimmt

$$\begin{aligned} A\alpha_{11} + B\alpha_{12} - (x_0 A + y_0 B)\alpha_{13} &= \lambda\xi\,|a|, \\ A\alpha_{21} + B\alpha_{22} - (x_0 A + y_0 B)\alpha_{23} &= \lambda\eta\,|a|, \\ A\alpha_{31} + B\alpha_{32} - (x_0 A + y_0 B)\alpha_{33} &= \lambda\,|a|, \end{aligned}$$

aus ihnen folgt

$$\lambda F_1(\xi, \eta) = A, \quad \lambda F_2(\xi, \eta) = B, \quad \lambda F_3(\xi, \eta) = -(x_0 A + y_0 B)$$

und

$$F(\xi; x_0) = 0,$$

d. h. die Pole aller Geraden durch einen Punkt liegen auf einer Geraden, der Polare des gemeinsamen Punktes.

§ 138. Konjugiert heißen zwei gerade Linien,

$$G = Ax + By + C = 0, \quad G' = A'x + B'y + C' = 0,$$

wenn die eine den Pol der anderen enthält. Setzt man die Koordinaten des Poles von G in die Gleichung $G' = 0$ ein, so erhält man als Bedingung für das Konjugiertsein die Gleichung

$$\begin{aligned} AA'\alpha_{11} + (AB' + A'B)\alpha_{12} + BB'\alpha_{22} + (AC' + A'C)\alpha_{13} \\ + (BC' + B'C)\alpha_{23} + CC'\alpha_{33} = 0, \end{aligned}$$

die die Bestimmungsstücke der beiden Geraden GG' symmetrisch enthält, woraus folgt:

Liegt der Pol von G auf G', so liegt auch der Pol von G' auf G.

In einer der des § 128 analogen Bezeichnungsweise schreibt sich dies kürzer

$$CC'\Phi\left(\frac{A}{C};\frac{A'}{C'}\right)=0$$

oder wenn die Geraden

$$G=ux+vy+1=0,\quad G'=u'x+v'y+1=0$$

in der dualistischen Form gegeben sind

$$\Phi(u;u')=\Phi(u';u)$$
$$=u\Phi_1(u',v')+v\Phi_2(u',v')+\Phi_3(u',v')=0.$$

In Linienkoordinaten bedeutet bei festem $u'v'$ diese Gleichung den Pol von G'.

Die beiden Geraden

$$G_\lambda=G+\lambda G'=0,\ G_{\lambda'}=G+\lambda' G'=0$$

sind einander konjugiert, wenn

$$\Phi\left(\frac{A+\lambda A'}{C+\lambda C'};\frac{A+\lambda' A'}{C+\lambda' C'}\right)(C+\lambda C')(C+\lambda' C')=0$$
$$=C^2\Phi\left(\frac{A}{C},\frac{B}{C}\right)+(\lambda+\lambda')CC'\Phi\left(\frac{A}{C};\frac{A'}{C'}\right)+\lambda\lambda' C'C'\Phi\left(\frac{A'}{C'},\frac{B'}{C'}\right)$$

ist, oder, wenn $C=C'=1,\ A=u,\ B=v,\ A'=u',\ B'=v'$ ist, sie sind konjugiert, wenn

$$\Phi(u,v)+(\lambda+\lambda')\,\Phi(u;u')+\lambda\lambda'\Phi(u',v')=0$$

ist. Zwischen $\lambda\lambda'$ besteht eine bilineare symmetrische Beziehung, deshalb sind die Paare $G_\lambda G_{\lambda'}$ in Involution. Ist G konjugiert G', ist also $\Phi(u;u')=0$, so wird unsere Bedingung

$$\Phi(u,v)+\lambda\lambda'\Phi(u',v')=0.$$

Sind aber GG' sich selbst konjugiert, ist

$$\Phi(u;u)=\Phi(u,v)=0,\quad \Phi(u',v')=0,$$

so wird die Bedingung $\lambda+\lambda'=0$, für $\lambda=0$ und $\lambda=\infty$ erhält man die Doppelstrahlen dieser Involution, die die Tangenten an die Kurve vom Involutionszentrum sind.

Nebenbei bemerken wir, daß man der Bedingung

$$\Phi\left(\frac{A}{C};\frac{A'}{C'}\right)CC'=0$$

die Form geben kann

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C \\ A' & B' & C' & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung $\Phi(u, v) = 0$ bedeutet in Linienkoordinaten einen Geradenbüschel zweiter Ordnung, der aus den Tangenten der Kurve $F(x, y) = 0$ besteht.

§ 139. Ist $F = \sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 - h$, so ist nach § 137 die adjungierte Form

$$\Phi = -h\sigma_1\sigma_2\left(\frac{u^2}{\sigma_1} + \frac{v^2}{\sigma_2} - \frac{1}{h}\right)$$

und $\Phi(u, v) = 0$ ist die Gleichung der auf die Achsen bezogenen Kurve zweiter Ordnung $F(x, y) = 0$ in Linienkoordinaten, wie man sagt. So wie die Gleichung $Au + Bv + C = 0$ die Gleichung eines Punktes genannt wird, nämlich des Trägers des Büschels, die die Gleichung im Grunde bedeutet, so nennt man auch $\Phi = 0$ die Gleichung der Kurve, auf die sich der Büschel stützt. Von den Stützpunkten wird noch gesprochen werden. Ist hier $|a| = 0$, so ist entweder $h = 0$ oder $\sigma_2 = 0$ oder $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ oder $h = 0$, $\sigma_2 = 0$. Ist $h = 0$, so geht $\Phi = 0$ über in $\sigma_1\sigma_2 (= \text{const.}) = 0$. Die adjungierte Form bedeutet einen doppelt zu zählenden Geradenbüschel durch den Koordinatenanfang.

Setzen wir $\sigma_2 = h\tau_2$ und $h = 0$, so ist $F = \sigma_1 x^2 = 0$, eine doppelt zu zählende Gerade, die y-Achse. Der adjungierte Büschel hat die Gleichung

$$\frac{v^2}{\tau_2} = 1, \quad \left(\frac{v}{\sqrt{\tau_2}} - 1\right)\left(\frac{v}{\sqrt{\tau_2}} + 1\right) = 0.$$

Der Büschel $\Phi = 0$ zerfällt in zwei lineare Büschel, deren Träger $x = 0$, $y = \pm 1 : \sqrt{\tau_2}$ sind, oder er bedeutet zwei Punkte in Linienkoordinaten.

Ist $\sigma_2 = 0$, so bedeutet $F = \sigma_1 x^2 - h = 0$ zwei parallele Linien; die adjungierte Form hat die Gleichung $v^2 = 0$, das be-

deutet einen doppelt zu zählenden Parallelstrahlenbüschel, dessen Träger der Schnittpunkt der beiden Parallelen $F = 0$ ist. Ist endlich $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ und lassen wir diese Größen im Verhältnisse $\sigma_1 : \sigma_2 = 1 : \tau$ verschwinden, so wird

$$\Phi = u^2 + \tau v^2 = (u + \sqrt{-\tau}v)(u - \sqrt{-\tau}v) = 0.$$

$F = 0$ kann dann als die unendlich ferne Gerade doppelt gezählt gedeutet werden, $\Phi = 0$ aber bedeutet zwei Parallelstrahlenbüschel, oder zwei unendlich ferne Punkte in Linienkoordinaten.

§ 140. Brennpunkte. Achsenproblem. In jeder Strahleninvolution gibt es ein rechtwinkliges Paar, oder alle Paare sind rechtwinklig. Die Doppelstrahlen einer rechtwinkligen Involution gehen nach den absoluten Punkten, und es sind, wenn die Involution „zu F gehört", d. h. aus Paaren in bezug auf F konjugierter Geraden besteht, die Doppelstrahlen Tangenten der Kurve $F = 0$, und zwar Tangenten vom Involutionsträger aus. Punkte aber, in denen alle Paare rechtwinklig sind, sind Brennpunkte, denn in ihnen schneiden sich zwei von den absoluten Punkten an die Kurve gezogene Tangenten, die Doppelstrahlen der Involution.

In jedem anderen Punkte gibt es nur ein rechtwinkliges Paar senkrecht konjugierter Geraden, es ist das Paar, welches Winkel und Nebenwinkel des an die Kurve gezogenen Tangentenpaares hälftet. Liegt der Punkt im Innern von F, so sind freilich die Tangenten imaginär. Die Paare konjugierter Durchmesser bilden einen speziellen Fall konjugierter Geraden durch einen Punkt.

Die Aufgabe, das rechtwinklige Paar zu finden, führt auf das Achsenproblem. Die Achsen können auf geometrischem Wege wie folgt gefunden werden. Man lege um den Mittelpunkt einen Kreis, der die Kurve trifft, die Schnittpunkte bestimmen ein Rechteck, dessen Seiten den Achsen parallel sind.

Die Brennpunkte liegen notwendigerweise auf den Achsen. Denn in jedem anderen Punkte gibt es ein nicht rechtwinkliges

Paar konjugierter Geraden, von denen die eine der durch den Punkt gehende Durchmesser ist.

§ 141. Konstruktion der Brennpunkte. Zieht man durch die Pole $g_1, g_2, g_3, \cdots$ der Geraden $G_1, G_2, G_3, \cdots$ eines Parallelstrahlenbüschels zu ihnen senkrechte gerade Linien $H_1, H_2, H_3, \cdots$, so sind diese den Geraden $G_1, G_2, G_3, \cdots$ projektiv zugeordnet, und die entsprechenden Geraden $G_1 H_1, G_2 H_2, \cdots$ bestimmen auf einer Achse eine Involution, denn der Mittelpunkt und der unendlich ferne Punkt der Achse bilden ein „Paar", und folglich sind immer je zwei entsprechende Punkte ein „Paar". Die Doppelpunkte dieser Involution sind die Brennpunkte, weil in ihnen zwei Paare senkrecht konjugierter Geraden vorhanden sind. Nur auf einer Achse hat die Involution reelle Doppelpunkte. Denn ein beliebiges rechtwinkliges Strahlenpaar trifft die eine Achse in Punkten, die durch den Mittelpunkt und den unendlich fernen Punkt getrennt sind, die andere in Punkten, die durch den Mittelpunkt und den unendlich fernen Punkt nicht getrennt sind.

Irgend ein zusammengehörendes Paar $G_1 H_1, G_2 H_2, \cdots$ ist durch die Brennpunkte harmonisch getrennt. Da G_1 ganz willkürlich gewählt wurde, so folgt daraus der Satz: Jedes Paar senkrecht konjugierter Geraden ist durch die Brennpunkte harmonisch getrennt und hälftet Winkel und Nebenwinkel der vom Kreuzpunkte der Geraden nach den Brennpunkten gezogenen Geraden.

In einem Punkte der Kurve selbst bilden Tangente und Normale ein rechtwinkliges Paar, sie sind folglich harmonisch durch die Brennpunkte getrennt und hälften Winkel und Nebenwinkel der sogenannten Brennstrahlen. Aus dieser Eigenschaft wird der Name „Brennpunkte" hergeleitet.

Strahlen, die vom unendlich fernen Punkt einer Parabel herkommen, werden, an der Parabel reflektiert, in ihrem Brennpunkte vereinigt.

Schneiden sich konfokale Kegelschnitte reell, so schneiden sie sich rechtwinklig, denn im Schnittpunkt gibt es nur einen

rechten Winkel, der durch die Brennpunkte harmonisch getrennt ist, der Winkel und Nebenwinkel der Brennstrahlen hälftet. Die ihn bildenden Geraden müssen Tangente und Normale für beide Kurven sein.

Aus $F(x; x') = 0$ folgt, daß die Linienkoordinaten der Polare des Punktes $x'y'$ für F die Werte haben

$$u' : v' : 1 = F_1(x', y') : F_2(x', y') : F_3(x', y'),$$

woraus umgekehrt folgt

$$x' : y' : 1 = \Phi_1(u', v') : \Phi_2(u', v') : \Phi_3(u', v').$$

§ 142. Der Polarenbüschel eines Kegelschnittes. Für die Kurve zweiter Ordnung

$$F'(x, y) = a_{11}'x^2 + 2a_{12}'xy + \cdots a_{33}' = 0$$

seien $x'y'$, xy konjugierte Punkte, so daß

$$F'(x; x') = xF_1'(x', y') + yF_2'(x', y') + F_3'(x', y') = 0$$

ist. Suchen wir nun die Polaren der Punkte xy, $x'y'$ in bezug auf die Kurve $F = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \cdots a_{33} = 0$ und lassen uv die Linienkoordinaten der Polare von xy, $u'v'$ die der Polare von $x'y'$ sein, so ist

$$x = \frac{\Phi_1(u,v)}{\Phi_3(u,v)}, \quad y = \frac{\Phi_2(u,v)}{\Phi_3(u,v)}; \quad x' = \frac{\Phi_1(u',v')}{\Phi_3(u',v')}, \quad y' = \frac{\Phi_2(u',v')}{\Phi_3(u',v')},$$

setzt man diese Werte in die Gleichung $F(x; x')$ ein und multipliziert mit $\Phi_3(u, v) \cdot \Phi_3(u', v')$, so erhält man einen in uv und $u'v'$ linearen, einen bilinearen Ausdruck von der Form

$$\gamma_{11}uu' + \gamma_{12}uv' + \gamma_{21}u'v + \gamma_{22}vv' + \cdots \gamma_{33} = 0.$$

Dieser Ausdruck ändert sich nicht, wenn man xy mit $x'y'$ vertauscht, er muß also auch ungeändert bleiben, wenn man uv mit $u'v'$ vertauscht, und es muß demnach $\gamma_{12} = \gamma_{21}$, $\gamma_{13} = \gamma_{31}$, $\gamma_{23} = \gamma_{32}$ sein. — Ist $\Gamma(u, v)$ die Form zweiter Ordnung

$$\gamma_{11}u^2 + 2\gamma_{12}uv + \gamma_{22}v^2 + \cdots + \gamma_{33},$$

so besteht zwischen uv, $u'v'$ die Gleichung

$$\Gamma(u; u') = u\Gamma_1(u', v') + v\Gamma_2(u', v') + \Gamma_3(u', v') = \Gamma(u'; u) = 0.$$

Sind xy, $x'y'$ zusammenfallende (für F' sich selbst entsprechende auf $F'=0$ liegende) Punkte, so genügen die Polaren derselben der Gleichung $\Gamma(u,v)=0$, oder die Polaren der Punkte der Kurve zweiter Ordnung $F'=0$ in bezug auf die Kurve $F=0$ liegen in einem Büschel zweiter Ordnung $\Gamma(u,v)=0$, dem Polarbüschel der Kurve F'.

Ist

$$F(x,y)=x^2+y^2+1=0, \quad \Phi(u,v)=u^2+v^2+1=0,$$

so ist $xx'+yy'+1=0$ die Gleichung der Polare des Punktes $x'y'$ und $u=x'$ $v=y'$ sind die Linienkoordinaten der Polare, sie ist die Gerade, die wir schon im § 41 die Polare des Punktes $x'y'$ nannten. Setzt man in der Gleichung $F'(x,y)=0$

$$x=\Phi_1(u,v):\Phi_3(u,v)=u, \quad y=v$$

ein, so findet man für den Polarbüschel von $F'(x,y)=0$ die Gleichung $F'(u,v)=0$, also die ursprüngliche Gleichung wieder, in Linienkoordinaten interpretiert.

§ 143. Es ist zwar gezeigt worden, daß der F adjungierte Büschel $\Phi(u,v)=0$ aus Geraden besteht, die sich auf die Kurve $F=0$ stützen, sie berühren, es bleibt aber noch nachzuweisen, daß jeder Büschel zweiter Ordnung eine Kurve zweiter Ordnung zur Stützkurve hat. Dabei dürfen wir uns wohl etwas kürzer fassen und einige Betrachtungen nur andeuten.

Durch jeden Punkt gibt es zwei Strahlen des Büschels zweiter Ordnung

$$\Phi(u,v)=\alpha_{11}u^2+2\alpha_{12}uv+\cdots\alpha_{33}=0.$$

Die α sind jetzt als selbständige Größen, nicht als Adjunkten aufzufassen. Jeder Strahl durch einen Punkt läßt sich (§ 44) in der Form darstellen

$$u=u_0+tA, \quad v=v_0+tB.$$

Da hieraus folgt $uB-vA-(u_0B-v_0A)=0$, so hat der gegebene Punkt die Koordinaten

$$x=B:(v_0A-u_0B), \quad y=A:(u_0B-v_0A).$$

Die beiden Parameterwerte der Strahlen des Büschels durch xy, die $\Phi(u, v) = 0$ angehören, ergeben sich als Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\Phi(u_0, v_0) + 2t\,[A\,\Phi_1(u_0, v_0) + B\,\Phi_2(u_0, v_0)] + t^2\,\Psi(A, B) = 0,$$

wo $\Psi(A, B) = \alpha_{11}A^2 + 2\alpha_{12}AB + \alpha_{22}B^2$ ist. Nehmen wir an $u_0 v_0$ sei ein Strahl von Φ, so fällt das von t freie Glied fort, ein Parameterwert ist selbstverständlich Null. — Durch jeden Punkt auf $u_0 v_0$ (für jeden Wert des Verhältnisses $A : B$) erhalten wir noch einen zweiten Wert von t. Nur wenn

$$A\,\Phi_1(u_0, v_0) + B\,\Phi_2(u_0, v_0) = 0$$

wird, fällt der zweite Strahl mit dem ersten zusammen. Die Gleichung $\Phi(u_0 + tA,\ v_0 + tB) = 0$ hat die doppelte Wurzel $t = 0$. Da $A : B = u - u_0 : v - v_0$ ist, so ist die Gleichung dieses Punktes in Linienkoordinaten

$$\begin{aligned} &(u - u_0)\ \Phi_1(u_0, v_0) + (v - v_0)\ \Phi_2(u_0, v_0) \\ &= u\,\Phi_1(u_0, v_0) + v\ \Phi_2(u_0, v_0) + \Phi_3(u_0, v_0) = \Phi(u; u_0) = 0. \end{aligned}$$

Die rechtwinkligen Koordinaten dieses Punktes (wenn die xy- und uv-Koordinatenkreuze zusammenfallen) sind

$$x_0 : y_0 : 1 = \Phi_1(u_0, v_0) : \Phi_2(u_0, v_0) : \Phi_3(u_0, v_0).$$

Dieser Punkt wird der Stützpunkt des Strahles $u_0 v_0$ genannt. Wie die Tangente als Verbindungslinie zweier unendlich nahe benachbarter Punkte einer Kurve angesehen wird, so ist der Stützpunkt als der Schnittpunkt unendlich nahe benachbarter Strahlen eines Büschels anzusehen.

Nennen wir die Adjunkte von $\alpha_{\mu\nu}$ in der Determinante $|\alpha|$ $a_{\mu\nu}$, so findet man durch Auflösung der Gleichungen zwischen $x_0 y_0$; $u_0 v_0$

$$u_0 : v_0 : 1 = F_1(x_0, y_0) : F_2(x_0, y_0) : F_3(x_0, y_0),$$

wenn F die Φ adjungierte Form ist. Der Stützpunkt genügt der Gleichung

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

d. h. die Stützpunkte liegen auf einer Kurve zweiter Ordnung,

deren Gleichung in rechtwinkligen Punktkoordinaten die Φ adjungierte Form F gleich Null gesetzt ist.

Ist nun aber auch Φ die F adjungierte Form? Ja. Denn die Adjunkten der α sind nach § 81 den entsprechenden a proportional.

§ 144. Ist

$$\Phi = \alpha_{11} x^2 + 2\alpha_{12} xy + \cdots + \alpha_{33}$$

die

$$F = a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + \cdots + a_{33}$$

adjungierte Form, so ist $|a|F$ die Φ adjungierte Form. Da aber in der Geometrie diese Formen meist gleich Null gesetzt als Kurven und Büschelgleichungen vorkommen, so wollen wir $\Phi(u,v) = 0$ den $F(x,y) = 0$ adjungierten Büschel, $F(x,y) = 0$ die $\Phi(u,v) = 0$ adjungierte Kurve nennen. Die Kurve, die die Stützpunkte des der Kurve $F(x,y) = 0$ adjungierten Büschels enthält, ist die Kurve F selbst.

Man kann die Polarentheorie, die Theorie konjugierter Geraden und konjugierter Punkte genau so auf den Büschel $\Phi(u,v) = 0$ gründen, wie wir sie auf die Kurve $F(x,y) = 0$ gegründet haben. Ohne diesen Gedanken auszuführen bemerken wir nur, daß konjugierte Gerade und Punkte für F zugleich auch konjugierte Gerade und Punkte für den Büschel Φ sind.

Die in § 40 entwickelte Theorie der Dualität stützt sich auf die Sätze von Pol und Polare in bezug auf den imaginären Kreis $x^2 + y^2 + 1 = 0$. Die Polare eines Punktes $\xi\eta$ hat die Gleichung $x\xi + y\eta + 1 = 0$. Die Dualität kann ebenso auf eine beliebige andere Kurve zweiter Ordnung, die man die Kernkurve der dualistischen Verwandtschaft nennen kann, und die alle Punkte enthält, deren Polaren durch sie selbst gehen, oder deren Tangenten alle Geraden der dualistischen Verwandtschaft enthält, deren Pol auf sie selbst fällt, gegründet werden. Einem Punkte entspricht eine Gerade, seine Polare, einer Geraden ein Punkt, ihr Pol für die Grundkurve. Punkten einer Geraden entsprechen gerade Linien durch einen Punkt, und es sind die Geraden den Punkten projektiv zugeordnet. Gerade

Linien durch einen Punkt entsprechen Punkten auf einer Geraden. Punkte einer Kurve zweiter Ordnung entsprechen Strahlen eines Büschels zweiter Ordnung, dieser stützt sich auf eine Kurve zweiter Ordnung, die man die Polarkurve der ersteren nennen kann. Einem Büschel zweiter Ordnung entspricht eine Kurve zweiter Ordnung. Wie eine Kurve zweiter Ordnung aufgefaßt werden kann als der geometrische Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier projektiver Strahlbüschel, so kann ein Büschel zweiter Ordnung aufgefaßt werden als das System aller Geraden, die entsprechende Punkte zweier projektiver Punktreihen verbinden. So wie die Träger der Strahlbüschel zur Kurve gehören, so gehören die Träger der projektiven Punktreihen zum Büschel zweiter Ordnung. Als eine Betätigung der Fruchtbarkeit des dualistischen Prinzips beweisen wir mit demselben den Satz von Brianchon.

§ 145. Satz von Brianchon. Liegen sechs Punkte auf einem Kegelschnitt, so schneiden sich nach dem Pascalschen Satze die gegenüberliegenden Seiten jedes aus ihnen gebildeten Sechsecksechsseits in drei Punkten einer Geraden, und umgekehrt, die Ecken eines Sechsecksechsseits, deren gegenüberliegende Seiten sich in Punkten einer Geraden schneiden, liegen auf einer Kurve zweiter Ordnung. Suchen wir hierzu den dualistischen Satz, so können wir eine beliebige Kurve zweiter Ordnung als Grundkurve wählen, z. B. auch die, auf der die Ecken eines gegebenen Pascalschen Sechsecksechsseits liegen. Die sechs Ecken bilden sich ab auf sechs gerade Linien, ihre Polaren, das Sechsecksechsseit auf ein Sechsseitsechseck, die gegenüberliegenden Ecken entsprechen gegenüberliegenden Seiten, den Schnittpunkten gegenüberliegender Seiten entsprechen die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken. Die drei Schnittpunkte gegenüberliegender Seitenpaare liegen auf einer Geraden, die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken gehen durch einen Punkt. Die Ecken liegen auf einer Kurve zweiter Ordnung, die ihnen entsprechenden Geraden sind Strahlen eines Büschels zweiter Ordnung, also Tangenten

einer Kurve zweiter Ordnung. Daraus fließt der Satz von Brianchon.

Die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken eines einer Kurve zweiter Ordnung umschriebenen Sechsseitsechsecks gehen durch einen Punkt, und umgekehrt, gehen die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken eines Sechsseitsechsecks durch einen Punkt, so läßt sich demselben eine Kurve zweiter Ordnung einschreiben.

Damit kann man analog wie im § 116 einen Büschel aus fünf gegebenen Strahlen konstruieren. Ebenso auf jeder der gegebenen Geraden den Stützpunkt. Durch fünf Strahlen (Tangenten) ist ein Büschel und die zugehörige Stützkurve bestimmt.

Der Mac Laurinsche Satz ist sich selbst dualistisch zugeordnet, nimmt man die Kurve, auf die er sich bezieht, zur Grundkurve, so bildet sich die ganze Figur in sich ab.

§ 146. Allgemeine Dualität. Werden die Linienkoordinaten uv mit den Punktkoordinaten xy in die Beziehung gesetzt

$$u : v : 1 = f_1(x, y) : f_2(x, y) : f_3(x, y),$$

$$f_\mu(x, y) = b_{\mu 1} x + b_{\mu 2} y + b_{\mu 3},$$

woraus folgt

$$x : y : 1 = \varphi_1(u, v) : \varphi_2(u, v) : \varphi_3(u, v),$$

$$\varphi_\mu(u, v) = \beta_{1\mu} u + \beta_{2\mu} v + \beta_{3\mu},$$

wo die β die Adjunkten der b in der Determinante $|b|$ sind, so entspricht einer Gleichung $F(x, y) = 0$ in Punktkoordinaten eine Gleichung

$$F\left(\frac{\varphi_1(uv)}{\varphi_3(uv)}, \quad \frac{\varphi_2(uv)}{\varphi_3(uv)}\right) = 0,$$

die, wenn sie algebraisch ist, durch Multiplikation mit einer Potenz von $\varphi_3(u, v)$ wieder auf die Form einer ganzen algebraischen Gleichung

$$\Phi(u, v) = 0$$

gebracht werden kann, und es ist diese Gleichung in uv von demselben Grade als $F(x, y)$ in xy (und umgekehrt). Daraus

folgt: Einer geraden Linie entspricht ein Punkt (Träger eines linearen Büschels) und einem Punkte entspricht eine gerade Linie, Punkten auf einer Geraden entsprechen gerade Linien durch einen Punkt. Drückt man uv durch einen linearen Parameter aus, so werden xy in demselben Parameter lineare Formen, woraus folgt, daß das Doppelverhältnis in dieser Verwandtschaft invariant ist, und daß demnach entsprechende Punktreihen und Strahlenreihen projektiv sind. Einer Kurve zweiter Ordnung entspricht ein Büschel zweiter Ordnung. In den bisher behandelten dualistischen Verwandtschaften gab es eine Kernkurve, d. h. eine Kurve, deren Punkte nicht bloß in den ihnen entsprechenden Geraden (Polaren) lagen, sondern die auch zugleich Tangenten derselben Kurve waren. Fragen wir bei der jetzt definierten Verwandtschaft nach den Punkten, die auf ihren Polaren liegen, so muß $xu + yv + 1 = 0$ sein, wenn uv die Polare von xy ist, es muß also $u:v:1 = f_1(x,y):f_2(x,y):f_3(x,y)$

$$xf_1(x,y) + yf_2(x,y) + f_3(x,y) = 0$$
$$= x^2 b_{11} + xy(b_{12} + b_{21}) + y^2 b_{22} + x(b_{13} + b_{31}) + y(b_{23} + b_{32}) + b_{33}$$

sein. Die gesuchten Punkte liegen auf einer Kurve zweiter Ordnung, in ähnlicher Weise findet man für die Geraden, die ihre Pole enthalten

$$\beta_{11}u^2 + (\beta_{12} + \beta_{21})uv + \beta_{22}v^2 + \cdots + \beta_{33} = 0,$$

und es stützen sich diese Geraden auf eine Kurve zweiter Ordnung. Diese beiden Kurven fallen aber nur dann zusammen, wenn $b_{21} = b_{12}$, $b_{32} = b_{23}$, $b_{31} = b_{13}$ ist, in diesem Falle gibt es eine Kernkurve.

§ 147. Ist P die Polare eines Punktes p für die Kurve $F(x,y) = a_{11}x^2 + \cdots + a_{33} = 0$, ist P' die Polare eines Punktes p' auf P und ist P'' die Polare des Schnittpunktes p'' von PP', so bilden $pp'p''$ ein Dreieck, dessen Seiten die Polaren der gegenüberliegenden Ecken und dessen Ecken die Polaren der gegenüberliegenden Seiten sind. Ein solches Dreieck heißt ein Polardreieck. Die Mannigfaltigkeit solcher Dreiecke ist eine

dreifach unendliche, denn p kann willkürlich in der Ebene, p' willkürlich auf einer Geraden gewählt werden.

Ein Polardreieck kann ausarten. Ist p ein Punkt von F, so ist seine Polare P die Tangente. Die Polare P' irgend eines Punktes p' der Tangente geht durch den Berührungspunkt, $P'P$ schneiden sich in p, die Polare zu p ist wieder P. P'' fällt auf P. Das Dreieck besteht aus den Punkten $pp'p$, oder den Seiten $PP'P$, und hat den Inhalt Null.

Wenn jetzt von einem Polardreieck die Rede ist, so soll darunter ein eigentliches Dreieck verstanden werden.

Sind $X_1(x,y)=0$, $X_2(x,y)=0$, $X_3(x,y)=0$ drei gerade Linien, so bilden sie für die Kurve zweiter Ordnung

$$F(x,y)=a_1 X_1^2(x,y)+a_2 X_2^2(x,y)+a_3 X_3^2(x,y)=0$$

ein Polardreieck. Denn Polare des Schnittpunktes $\xi_1\eta_1$ der Geraden $X_2=0$, $X_3=0$ ist $a X_1(x,y) X_1(\xi_1,\eta_1)=0$, also $X_1(x,y)=0$. Dasselbe gilt von den anderen Ecken des Dreiecks $X_1 X_2 X_3$.

Schneiden sich die drei geraden Linien $X_1 X_2 X_3$ in einem Punkte, so zerfällt die Kurve $F=0$ in zwei gerade Linien, und das Polardreieck artet aus.

Bilden $X_1 X_2 X_3$ die Seiten eines Polardreiecks für eine Kurve zweiter Ordnung $F(x,y)=0$, so läßt sich die Gleichung der Kurve (§ 149) auf die Form bringen

$$a_1 X_1^2+a_2 X_2^2+a_3 X_3^2=0.$$

Es sei $X_\mu=d_{\mu 1}x+d_{\mu 2}y+d_{\mu 3}$ und es sei $\delta_{\mu\nu}$ die Adjunkte von $d_{\mu\nu}$ in der Determinante $|d|$, so folgt

$$x:y:1=\delta_{11}X_1+\delta_{21}X_2+\delta_{31}X_3:\delta_{12}X_1+\cdots:\delta_{13}X_1+\delta_{23}X_2+\delta_{33}X_3$$

und es sind die Größen xy durch die $X_1 X_2 X_3$ völlig bestimmt, wenn $|d|$ nicht Null ist, wenn sich also die Geraden nicht in einem Punkte schneiden, und ebenso sind $X_1 X_2 X_3$ durch xy völlig bestimmt. Verschiedene Werte von $X_1 X_2 X_3$ entsprechen jedoch nicht immer verschiedenen Werten von xy, weil diese Größen schon durch die Verhältnisse der X vollständig bestimmt sind.

§ 148. Dreieckskoordinaten. Man kann sich zur Bestimmung der Lage eines Punktes der Größen $X_1 X_2 X_3$ oder

vielmehr der Verhältnisse dieser Größen genau so bedienen als der rechtwinkligen Koordinaten xy. Diese Größen werden Dreieckskoordinaten (trimetrische Koordinaten) genannt. Die Koordinaten $X_1 X_2 X_3$ verschiedener Punkte sind nämlich den Entfernungen dieser Punkte von den Geraden $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$ proportional, oder, wenn diese Gleichungen in der Normalform stehen, so sind die X diesen Entfernungen unmittelbar gleich. Durch zwei Entfernungen, etwa die von $X_1 X_2$ und deren Vorzeichen ist die Lage eines Punktes schon völlig bestimmt und es besteht deshalb zwischen den Entfernungen von $X_1 X_2 X_3$ eine Gleichung. Es ist nämlich die Summe der Produkte der drei Entfernungen in die zu ihnen gehörenden Dreiecksseitenlängen eine konstante Größe, der doppelte Inhalt des Koordinatendreiecks, es besteht also eine Gleichung von der Form

$$L_1 X_1 + L_2 X_2 + L_3 X_3 = \text{Konst.}$$

Sind die Verhältnisse $X_1 : X_3 = \xi$, $X_2 : X_3 = \eta$ gegeben, so sind mit Hinzunahme der obigen Gleichung $X_1 X_2 X_3$ bestimmt, und es ist die Lage des zugehörigen Punktes bestimmt.

Ist irgend eine algebraische Kurve $f(x, y) = 0$ gegeben, und ersetzt man xy durch ihre Werte in $X_1 X_2 X_3$, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$f\left(\frac{\delta_{11} X_1 + \delta_{21} X_2 + \delta_{31} X_3}{\delta_{13} X_1 + \delta_{23} X_2 + \delta_{33} X_3}, \quad \frac{\delta_{12} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3}{\delta_{13} X_1 + \delta_{23} X_2 + \delta_{33} X_3}\right) = 0,$$

die nach Multiplikation mit $(\delta_{13} X_1 + \delta_{23} X_2 + \delta_{33} X_3)^n$, wenn f vom n^{ten} Grade ist, in eine ganze homogene Gleichung von der n^{ten} Dimension in $X_1 X_2 X_3$ übergeht. In dieser Homogenität liegen manche Vorteile der Dreieckskoordinaten, ein besonderer Vorteil ist noch der, daß auch die Koordinatenverhältnisse unendlich ferner Punkte endliche Größen sind, und daß deshalb das Unendliche keine besonderen Betrachtungen nötig macht.

Die Gleichung einer Geraden in Dreieckskoordinaten ist

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 = 0.$$

§ 149. Eine Gleichung zweiten Grades

$$F(x, y) = a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + \cdots + a_{33} = 0$$

nimmt in Dreieckskoordinaten die Form an

$$b_{11} X_1^2 + 2 b_{12} X_1 X_2 + b_{22} X_2^2 + 2 b_{13} X_1 X_3 + 2 b_{23} X_2 X_3 + b_{33} X_3^2 = 0.$$

Sind demnach $X_1(x,y) = 0$, $X_2(x,y) = 0$, $X_3(x,y) = 0$ drei beliebige sich nicht in einem Punkte schneidende gerade Linien, so läßt sich die Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung in der Form darstellen $b_{11} X_1^2 + 2 b_{12} X_1 X_2 + \cdots + b_{33} X_3^2 = 0$. Soll nun $X_1 X_2 X_3$ ein Polardreieck für die Kurve sein, so muß die Polare der Ecken $x_3 y_3$, des Schnittes von $X_1 X_2$ die Seite X_3 sein. Es muß also

$$[b_{13} X_1(x,y) + b_{23} X_2(x,y) + b_{33} X_3(x,y)]\, X_3(x_3, y_3) = 0$$

sein für alle Punkte der Geraden X_3. Da sich $X_1 X_2$ nicht auf X_3 schneiden, so muß $b_{13} = b_{23} = 0$ sein. Die analoge Schlußweise für die anderen Ecken führt dazu, daß die Kurvengleichung in der Form enthalten sein muß

$$b_{11} X_1^2 + b_{22} X_2^2 + b_{33} X_3^2 = 0.$$

Die Gleichung ist ein Aggregat von drei vollständigen Quadraten.

Die gemeinen rechtwinkligen Koordinaten bilden einen speziellen Fall von Dreieckskoordinaten. Es ist $x = X_1$, $y = X_2$, $1 = X_3$, die eine Dreieckseite ist die unendlich ferne Gerade. Die auf die Achsen bezogene Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung hat die Form

$$\sigma_1 X_1^2 + \sigma_2 X_2^2 - h X_3^2 = 0.$$

die Achsen und die unendlich ferne Gerade bilden ein Polardreieck.

§ 150. Die Polaren eines Punktes $x_0 y_0$ für die Individuen des Kegelschnittbüschels

$$F(x,y) + \lambda F'(x,y) = 0,$$

$$F = a_{11} x^2 + \cdots + a_{33}, \quad F' = a'_{11} x^2 + \cdots + a'_{33},$$

haben die Gleichung

$$F(x;x_0)+\lambda F'(x;x_0)=x[F_1(x_0y_0)+\lambda F'_1(x_0y_0)]$$
$$+y(F_2+\lambda F'_2)+(F_3+\lambda F'_3)=0,$$

sie bilden einen linearen Strahlenbüschel, ausgenommen wenn der Punkt x_0y_0 für F und F' dieselben Polaren hat.

Daraus folgert man mittels der Dualität. Die Polare einer Geraden für die Kegelschnitte einer Schaar, d. h. für die Kegelschnitte, die einer festen Geraden eingeschrieben sind, liegen (im allgemeinen) in einer Geraden. Nimmt man für die Gerade die unendlich ferne, so findet man den Satz von Gauß:

Die Mittelpunkte aller Kegelschnitte, die einem Vierseit eingeschrieben sind, liegen in einer Geraden, welche die drei Diagonalen hälftet.

§ 151. Gemeinsames Polardreieck. Die Polaren eines Punktes für die verschiedenen Individuen eines Kegelschnittbüschels sind im allgemeinen voneinander verschieden. Ist aber die Polare des Punktes x_0y_0 für F und F' dieselbe, so wird der Polarenbüschel von λ unabhängig, weil dann

$$F_1(x_0,y_0):F_2(x_0,y_0):F_3(x_0,y_0)=F_1'(x_0,y_0):F_2'(x_0,y_0):F_3'(x_0,y_0)$$

ist. In diesem Falle gibt es zum Punkt x_0y_0 unendlich viele für die Kurven des Büschels gleichzeitig konjugierte, nämlich die Punkte der gemeinsamen Polare, während es im allgemeinen zu einem Punkte nur einen ihm für alle Individuen des Büschels konjugierten gibt. — Darauf läßt sich eine (Möbiussche) Verwandtschaft gründen.

Eür solche Punkte x_0y_0 muß gleichzeitig

$$F_1+\mu F_1'=0,\quad F_2+\mu F_2'=0,\quad F_3+\mu F_3'=0$$

sein, wo μ ein Proportionalitätsfaktor ist, woraus folgt, daß

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\mu a'_{11} & a_{12}+\mu a'_{12} & a_{13}+\mu a'_{13} \\ a_{21}+\mu a'_{21} & a_{22}+\mu a'_{22} & a_{23}+\mu a'_{23} \\ a_{31}+\mu a'_{31} & a_{32}+\mu a'_{32} & a_{33}+\mu a'_{33} \end{vmatrix}=0$$

sein muß. Diese Gleichung hat im allgemeinen drei Wurzeln für μ und liefert drei Punkte x_0y_0, von denen mindestens

einer reell ist. Auf die Ausnahmen soll nicht eingegangen werden.

Verbindet man einen solchen Punkt $x_0 y_0$ mit einem Schnittpunkte von F und F', so muß diese Gerade, wegen der harmonischen Eigenschaft der gemeinsamen Polare noch durch einen zweiten Schnittpunkt von FF' gehen. Die gesuchten Punkte sind deshalb die Nebenecken, des von den vier Schnittpunkten von F und F' gebildeten Vierecks, und sie bilden ein gemeinsames Polardreieck für sie, sowie für alle Kurven des Büschels, und es gibt daher im allgemeinen ein und nur ein solches. Die Ausnahmefälle müssen unter denen zu suchen sein, in denen sich F und F' berühren, auf sie wollen wir nicht eingehen.

Die Schnittpunkte von FF' sind entweder reell oder paarweise konjugiert imaginär. Durch konjugiert imaginäre Punkte geht eine reelle Gerade, denn es ist

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 + x_1' i & y_1 + y_1' i & 1 \\ x_1 - x_1' i & y_1 - y_1' i & 1 \end{vmatrix} = -2i \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_1' & y_1' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung dieser Geraden. Deshalb gibt es sicher einen reellen Punkt $x_0 y_0$. Sind alle Schnittpunkte reell, so gibt es ein reelles gemeinsames Polardreieck. Sind sie alle vier imaginär, so hat die durch ein Paar imaginärer Punkte gehende Gerade mit der, die durch die beiden andern ihnen konjugierten geht, einen reellen Punkt gemein. Das gemeinsame Polardreieck ist ebenfalls reell. Sind aber von den Schnittpunkten von FF' zwei reell und zwei imaginär, so sind von den Ecken und Seiten des gemeinsamen Polardreiecks zwei (konjugiert) imaginär.

Kollineation.

§ 152. Statt die Verhältnisse $X_1 : X_3 = \xi$, $X_2 : X_3 = \eta$ als neue Koordinaten aufzufassen, kann man sie auch als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes ansehen, der durch die Gleichungen

$$\xi : \eta : 1 = d_{11}x + d_{12}y + d_{13} : d_{21}x + d_{22}y + d_{23} : d_{31}x + d_{32}y + d_{33},$$

$$x : y : 1 = \delta_{11}\xi + \delta_{21}\eta + \delta_{21} : \delta_{12}\xi + \delta_{22}\eta + \delta_{23} : \delta_{31}\xi + \delta_{32}\eta + \delta_{33}$$

mit dem Punkte xy in eine eindeutige Beziehung gesetzt ist, wenn $|d| \neq 0$ ist. Die hierdurch konstituierte Verwandtschaft heißt Kollineation oder auch projektive Verwandtschaft, im ebenen Felde. Die δ sind die Adjunkten der d in $|d|$.

In einer kollinearen Verwandtschaft entspricht jedem Punkte ein Punkt, aber auch jeder Geraden eine Gerade. Denn substituiert man in einer linearen Gleichung zwischen xy für diese Größen ihre Ausdrücke in $\xi\eta$, so erhält man wieder eine lineare Gleichung in $\xi\eta$. Ebenso entspricht jeder Kurve zweiter Ordnung eine Kurve zweiter Ordnung, einer Kurve n^{ter} Ordnung eine Kurve n^{ter} Ordnung.

Da die Kollineation acht wesentliche Konstanten enthält, so wird die kollineare Verwandtschaft durch vier Paare entsprechender Punkte bestimmt werden. Doch das ist genauer zu untersuchen.

Stellt man die Punkte einer Geraden durch einen Parameter linear dar, so drücken sich die Koordinaten der ihnen entsprechenden Punkte durch denselben Parameter linear aus. Folglich sind die Punkte einer Geraden den ihnen entsprechenden projektiv zugeordnet. Dasselbe gilt für gerade Linien durch einen Punkt, für Strahlenbüschel.

§ 153. Bestimmung der Kollineation durch vier Punktpaare. Man kann leicht unendlich viele Kollineationen angeben, in denen drei entsprechende Punktpaare gegeben sind, von denen wir voraussetzen, daß die Tripel nicht in einer geraden Linie liegen. — Die Punkte im $\xi\eta$-Felde seien $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, die entsprechenden im xy-Felde seien $g_1g_2g_3$. Die Gerade $\Gamma_1(\xi, \eta) = 0$ gehe durch $\gamma_2\gamma_3$, Γ_2 durch $\gamma_3\gamma_1$ und Γ_3 durch $\gamma_1\gamma_2$. Die Gerade $G_1(x, y)$ gehe durch g_2g_3, G_2 durch g_3g_1 und G_3 durch g_1g_2. So geben die Gleichungen

$$\frac{\Gamma_1(\xi, \eta)}{\Gamma_3(\xi, \eta)} = \frac{\lambda_1 G_1(x, y)}{\lambda_3 G_3(x, y)}, \quad \frac{\Gamma_2(\xi, \eta)}{\Gamma_3(\xi, \eta)} = \frac{\lambda_2 G_2(x, y)}{\lambda_3 G_3(x, y)}$$

die gesuchte Kollineation. Es lassen sich aus diesen Gleichungen $\xi\eta$ linear durch xy und umgekehrt xy linear durch $\xi\eta$ darstellen.

Es ist dies aber auch die allgemeinste Kollineation, die die gegebenen Bedingungen erfüllt, wenn $\lambda_1 : \lambda_3$, $\lambda_2 : \lambda_3$ willkürliche Größen sind. Denn führt man in die Quotienten

$$\Gamma_1(\xi, \eta) : \Gamma_3(\xi, \eta), \quad \Gamma_2(\xi, \eta) : \Gamma_3(\xi, \eta),$$

für die $\xi\eta$ ihre die Kollineation bestimmenden Ausdrücke in xy ein, so ergeben sich lineare Quotienten in xy. Diese sind aber durch die Nullstellen der Zähler und Nenner bis auf konstante Faktoren, die willkürlich bleiben, bestimmt.

Die Faktoren $\lambda_1 : \lambda_3$, $\lambda_2 : \lambda_3$ lassen sich auf eine Weise so bestimmen, daß einem Punkt γ_4 des $\xi\eta$-Feldes ein gegebener Punkt g_4 des xy-Feldes entspricht. Liegt γ_4 auf einer der Geraden Γ etwa auf Γ_1, so muß g_4 auf G_1 liegen. Dann wird nur $\lambda_2 : \lambda_3$ bestimmt, während $\lambda_1 : \lambda_3$ willkürlich bleibt. Durch vier Paare entsprechender Punkte ist demnach eine Kollineation völlig bestimmt, wenn keine drei auf einer Geraden liegen. Liegen drei auf einer Geraden, so bleibt noch eine Konstante zur Verfügung.

§ 154. In einer kollinearen Verwandtschaft in derselben Ebene gibt es im allgemeinen drei sich selbst entsprechende Punkte, Doppelpunkte. Schreibt man die Gleichungen der Kollineation des § 152 in der Form

$$d_{11}x + d_{12}y + d_{13} = \lambda\xi, \quad d_{21}x + d_{22}y + d_{23} = \lambda\eta,$$
$$d_{31}x + d_{32}y + d_{33} = \lambda$$

und fragt nach den Stellen, für die xy mit $\xi\eta$ zusammenfällt, so ergibt sich für λ die Bedingung

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} d_{11} - \lambda & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} - \lambda & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Im allgemeinen Falle wird diese Gleichung drei verschiedene Wurzeln haben, und jede Wurzel bestimmt einen Punkt xy.

Um dies zu erweisen müssen wir einen Hilfssatz aus der Algebra heranziehen.

Eine algebraische Gleichung

$$f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n = 0$$

besitzt zwei zusammenfallende Wurzeln dann und nur dann, wenn für einen Wert von λ sie nicht bloß selbst, sondern zugleich ihre Ableitung

$$f'(\lambda) = a_1 + 2a_2\lambda + 3a_3\lambda^2 + \cdots + na_n\lambda^{n-1}$$

verschwindet. — Die Ableitung von $D(x)$ ist

$$D'(x) = -\begin{vmatrix} d_{22}-\lambda & d_{23} \\ d_{32} & d_{33}-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} d_{11}-\lambda & d_{13} \\ d_{31} & d_{33}-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} d_{11}-\lambda & d_{12} \\ d_{21} & d_{22}-\lambda \end{vmatrix},$$

also gleich der negativen Summe der drei Adjunkten von $d_{11}-\lambda$, $d_{22}-\lambda$, $d_{33}-\lambda$ in der Determinante $D(\lambda)$. Ist nun λ ein Wert, für den $D(\lambda)$ verschwindet, so wird xy durch jedes Paar von den drei Gleichungen

$$(d_{11}-\lambda)x + d_{12}y + d_{13} = 0, \quad d_{21}x + (d_{22}-\lambda)y + d_{23} = 0,$$
$$d_{31}x + d_{32}y + d_{33} - \lambda = 0$$

gefunden, und die Lösung wird nur dann unbestimmt, wenn die sämtlichen Adjunkten der Determinante $D(\lambda)$ verschwinden. Dann hat aber $D(\lambda)$ eine doppelte Wurzel (was nicht umgekehrt werden darf). Sind demnach die drei Wurzeln von $D(\lambda) = 0$ voneinander verschieden, so gibt es drei und nur drei Doppelpunkte der Kollineation, von denen mindestens einer reell ist, weil $D(\lambda) = 0$ sicher eine reelle Wurzel hat.

Für veränderliche λ bedeuten die Gleichungspaare

$$d_{11}x + d_{12}y + d_{13} - \lambda x = 0, \quad d_{31}x + d_{32}y + d_{33} - \lambda = 0;$$
$$d_{21}x + d_{22}y + d_{23} - \lambda y = 0, \quad d_{31}x + d_{32}y + d_{33} - \lambda = 0$$

zwei Kegelschnitte, die einen (unendlich fernen) Punkt miteinander gemein haben, die drei weiteren Schnittpunkte sind die Doppelpunkte der Kollineation.

Die Drehungskongruenz

$$\xi = x \cos \omega + y \sin \omega, \quad \eta = -x \sin \omega + y \cos \omega$$

ist ein Beispiel für diese Verwandtschaft. Die Doppelpunkte sind der Koordinatenanfang und die absoluten Punkte.

§ 155. $D(\lambda) = 0$ besitzt eine doppelte Wurzel. In diesem Falle gibt es im allgemeinen nur zwei sich selbst entsprechende Punkte.

Entspricht in der Kollineation eine Gerade sich selbst, so enthält sie im allgemeinen zwei sich selbst entsprechende Punkte, weil die Punkte auf ihr einander kollinear (projektiv) zugeordnet sind, und weil eine Kollineation auf einer Geraden im allgemeinen zwei Doppelpunkte hat. Die Verbindungslinie der beiden Doppelpunkte unserer Kollineation ist offenbar eine sich selbst entsprechende Gerade, und die Doppelpunkte der Kollineation sind die sich selbst entsprechenden Punkte auf ihr.

Sucht man nach der sich selbst entsprechenden Geraden, so muß

$$A\xi + B\eta + C = 0,$$

$$(Ad_{11} + Bd_{21} + Cd_{31})x + (Ad_{12} + Bd_{22} + Cd_{32})y + (Ad_{13} + Bd_{23} + Cd_{33}) = 0$$

dieselbe Gerade bedeuten. Man findet dann durch eine der oben geführten ganz analoge Untersuchung, daß es im Falle einer doppelten Wurzel zwei sich selbst entsprechende Gerade gibt. Wir beschränken uns auf die Betrachtung eines besonderen Falles. Es sei

$$\xi = ax, \quad \eta = bx + ay, \quad a \neq 1.$$

Dann ist

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & 0 & 0 \\ b & a - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)^2 (1 - \lambda),$$

und zur Bestimmung der Doppelpunkte dienen die Gleichungen

$$x(a - \lambda) = 0, \quad bx + (a - \lambda)y = 0, \quad 1 - \lambda = 0.$$

$D(\lambda) = 0$ liefert $\lambda = 1$ und die Doppelwurzel $\lambda = a$.

Für die einfache Wurzel $\lambda = 1$ erhält man den Doppelpunkt der Kollineation $x = 0$, $y = 0$.

Für die doppelte Wurzel $a = \lambda$ bedeutet die Gleichung $1 - \lambda = 0$ die unendlich ferne Gerade, auf ihr ist der zugehörige Doppelpunkt zu suchen, die beiden anderen Gleichungen reduzieren sich auf die eine $bx = 0$. Der unendlich ferne Punkt der y-Achse ist also der der Doppelwurzel entsprechende Doppelpunkt. Durch ihn gibt es außer der y-Achse noch eine zweite sich selbst entsprechende Gerade, nämlich die unendlich ferne Gerade, die Projektivität auf ihr ist parabolisch.

§ 156. Die perspektive Kollineation. Hat die Gleichung $D(\lambda) = 0$ eine doppelte Wurzel, und sind für den zugehörigen Wert λ die sämtlichen Adjunkten der Determinante $D(\lambda)$ gleich Null, so fallen die drei zur Bestimmung der Doppel punkte dienenden Geraden

$$(d_{11} - \lambda)x + d_{12}y + d_{13} = 0, \quad d_{21}x + (d_{22} - \lambda)y + d_{23} = 0,$$
$$d_{31}x + d_{32}y + d_{33} - \lambda = 0$$

in eine zusammen, deren Punkte sich sämtlich entsprechen. In diesem Falle gibt es also eine sich Punkt für Punkt entsprechende Gerade, die man Perspektivitäts- oder Kollineationsachse nennen kann. Die einfache Wurzel liefert dann noch einen weiteren sich selbst entsprechenden Punkt. Jede Gerade durch ihn entspricht sich selbst, weil sie außer diesem Punkte noch einen zweiten sich selbst entsprechenden Punkt, den Schnittpunkt mit der Kollineationsachse enthält. Durch die Kollineationsachse und den sich selbst entsprechendem Punkte ist die Kollineation noch nicht vollständig bestimmt. Man kann vielmehr einem Punkte des einen Feldes einen Punkt des andern zuordnen, der auf der Verbindungslinie dieses Punktes mit dem sich selbst entsprechenden liegt. Ein einfaches Beispiel für diese Kollineation bildet die Verwandtschaft der Ähnlichkeit in ähnlicher Lage

$$\xi = ax, \quad \eta = ay.$$

Der Ähnlichkeitspunkt (hier der Koordinatenanfang) und die sämtlichen unendlich fernen Punkte sind Doppelpunkte der Kollineation.

§ 157. Die Gleichung $D(\lambda) = 0$ besitzt eine dreifache Wurzel. In diesem Falle gibt es im allgemeinen nur einen sich selbst entsprechenden Punkt und eine sich selbst entsprechende Gerade, auf der zugeordnete Punkte parabolisch projektiv sind. Ein Beispiel bietet die Verwandtschaft

$$\xi = x + by, \quad \eta = y + c, \quad D(\lambda) = (1 - \lambda)^3.$$

Der Doppelpunkt ist der unendlich ferne Punkt der x-Achse ($y = 0$, $x = \infty$).

Wenn aber für den Wurzelwert λ die sämtlichen Adjunkten von $D(\lambda)$ verschwinden, so gibt es unendlich viele Doppelpunkte, die eine Gerade erfüllen. Ein einfaches Beispiel ist die Verschiebungskongruenz

$$\xi = x + a, \quad y = \eta + b$$

in der die unendlich fernen Punkte Doppelpunkte sind, außer denen es keinen weiteren gibt.

Sind die Terme der Determinante für den Wurzelwert λ sämtlich gleich Null, so muß $\xi = x$, $\eta = y$ sein, die Verwandtschaft ist die der Identität.

§ 158. Die affine Verwandtschaft. Entspricht in einer Kollineation die unendlich ferne Gerade sich selbst, so wird sie eine affine genannt. Es ist dann in der Kollineationsproportion

$$\xi : \eta : 1 = X_1 : X_2 : X_3, \quad X_3 = 1$$

und also

$$\xi = d_{11}x + d_{12}y + d_{13}, \quad \eta = d_{21}x + d_{22}y + d_{23}.$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} d_{11} - \lambda & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} - \lambda & d_{23} \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} d_{11} - \lambda & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Da

$$\begin{vmatrix} \xi_1 \eta_1 1 \\ \xi_2 \eta_2 1 \\ \xi_3 \eta_3 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11}x_1 + d_{12}y_1 + d_{13}, & d_{21}x_1 + d_{22}y_1 + d_{23}, & 1 \\ d_{11}x_2 + d_{12}y_2 + d_{13}, & d_{21}x_2 + d_{22}y_2 + d_{23}, & 1 \\ d_{11}x_3 + d_{12}y_3 + d_{13}, & d_{21}x_3 + d_{22}y_3 + d_{23}, & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} d_{11}(x_2 - x_1) + d_{12}(y_2 - y_1), & d_{21}(x_2 - x_1) + d_{22}(y_2 - y_1) \\ d_{11}(x_3 - x_1) + d_{12}(y_3 - y_1), & d_{21}(x_3 - x_1) + d_{22}(y_3 - y_1) \end{vmatrix}$$

$$= (d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}) \cdot \begin{vmatrix} x_1 y_1 1 \\ x_2 y_2 1 \\ x_3 y_3 1 \end{vmatrix}$$

ist, so folgt, daß der Inhalt jedes Dreiecks und der seines Bildes, und damit der jeder Figur und ihres Bildes, einander proportional sind. Es wird durch die affine Kollineation eine sogenannte flächentreue oder äquivalente Abbildung vermittelt. Ist $d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} = 1$, so ist die Flächentreue nicht bloß eine proportionale, sondern eine vollkommene.

Ist

$$\xi = d(x \cos\omega + y \sin\omega) + d_{13}, \quad \eta = d(-x \sin\omega + y \sin\omega) + d_{23},$$

so ist die Abbildung die der Ähnlichkeit, in der auch noch die Winkel treu wiedergegeben werden. Ist

$$\xi = dx + d_{13}, \quad \eta = dy + d_{23},$$

so hat man Ähnlichkeit mit ähnlicher Lage, in der die unendlich ferne Gerade Kollineationsachse ist. Für $d = 1$ entspringt daraus im ersten Falle die allgemeine Kongruenz, im zweiten die Verschiebungskongruenz.

§ 159. Wendet man auf die Ebene als $\xi\eta$-Feld, und als ihm kollineares Feld, das xy-Feld, dieselbe Kollineation an, so kann man, da es in jeder Kollineation eine sich selbst entsprechende Gerade gibt, diese durch die gemeinsame kollineare Abbildung zur unendlich fernen machen, so daß Affinität entsteht. Daraus folgt, daß es genügt, die verschiedenen Arten der Kollineation, mit drei mit zwei mit einem Doppelpunkt, und die mit einer Kollineationsachse an der affinen Verwandtschaft zu studieren.

Im Obigen sind diese Unterscheidungen im allgemeinen Falle studiert.

§ 160. Schiefwinklige Koordinaten. Sind $\xi\eta$ die Koordinaten eines Punktes in einem schiefen Koordinatenkreuze, dessen Winkel ω ist, und ist f die Entfernung des Punktes von der ξ-Achse, e die von der η-Achse, so ist

$$\xi = e : \sin\omega, \quad \eta = f : \sin\omega.$$

Sind nun $\xi = a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$, $\eta = b_1 x + b_2 y + b_3 = 0$ die Gleichungen der η- bez. der ξ-Achse in einem rechtwinkligen Koordinatensystem, so ist

$$e = \frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \quad f = \frac{b_1 x + b_2 y + b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

und also

$$\xi = \frac{\operatorname{cosec}\omega}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}(a_1 x + a_2 y + a_3), \quad \eta = \frac{\operatorname{cosec}\omega}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}(b_1 x + b_2 y + b_3).$$

Diese Gleichungen vermitteln den Übergang von rechtwinkligen Koordinaten xy zu schiefen $\xi\eta$. Deutet man $\xi\eta$ und xy als rechtwinklige Koordinaten desselben Kreuzes, so definieren diese Gleichungen eine Affinität.

Sind die Gleichungen der schiefen Achsen

$$x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0, \quad y = 0,$$

so ist

$$\xi = x - y\operatorname{ctg}\alpha, \quad \eta = y : \sin\alpha; \quad x = \xi + \eta\cos\alpha, \quad y = \eta\sin\alpha.$$

Transformiert man durch diese Substitution die Gleichung der Parabel $y^2 - 2px = 0$, so folgt

$$\eta^2\sin^2\alpha - 2p\xi - 2p\eta\cos\alpha =$$
$$(\eta - p\cos\alpha)^2\sin^2\alpha - 2p(\xi + p\cos^2\alpha) = 0.$$

Durch Parallelverschiebung erhält man die im § 111 gegebene Gleichung der Parabel in schiefen Koordinaten.

§ 161. Ein Kegelschnitt, der nicht in zwei reelle gerade Linien zerfällt, besitzt stets konjugiert imaginäre Punkte, es

gibt gerade Linien, die ihn nicht sichtbar treffen. Bildet man einen Kegelschnitt durch eine Kollineation ab, so ist das Bild ein Kegelschnitt. Wählt man die Kollineation so, daß ein Paar konjugiert imaginärer Punkte des Kegelschnittes auf die absoluten Punkte abgebildet werden, so ist der Bildkegelschnitt, weil er durch die absoluten Punkte geht, ein Kreis. Jeder Kegelschnitt ist einem Kreise kollinear.

Schneiden sich zwei Kegelschnitte nicht in vier reellen Punkten, sondern sind mindestens zwei derselben (konjugiert) imaginär, so kann man durch eine Kollineation beide Kegelschnitte zugleich auf Kreise abbilden. Ausgenommen ist der Fall, daß einer der beiden Kegelschnitte in zwei gerade Linien zerfällt. In diesem Falle würde sich der zerfallende Kegelschnitt in eine Gerade plus der unendlich fernen Geraden abbilden.

Wollte man nachweisen, daß eine Kollineation durch eine Reihe von Projektionen erzeugt werden könne, so müßte man räumliche (dreidimensionale) Betrachtungen heranziehen, wovon wir hier absehen.

§ 162. Die uneigentliche Kollineation. Diese wollen wir nur am Beispiele der Affinität studieren. Sind die zwei Geraden $X_1 = d_{11}x + d_{12}y + d_{13} = 0$, $X_2 = d_{21}x + d_{22}y + d_{23} = 0$ einander parallel, während $X_3 = 1 = 0$ die unendlich ferne Gerade bedeutet, so schneiden sich die drei Geraden $X_1 X_2 X_3$ in einem Punkte, die Kollineation ist uneigentlich. Es gehört auch in diesem Falle, in dem $d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} = 0$ ist, zu jedem Punkte xy ein bestimmter Punkt $\xi\eta$. Es ist aber

$$\xi d_{21} - \eta d_{11} = d_{13}d_{21} - d_{23}d_{11},$$

die Punkte erfüllen nicht die ganze Ebene, sondern nur eine gerade Linie. Liegt xy auf der Geraden $d_{11}x + d_{12}y = c$, so ist

$$\xi = c + d_{13}, \quad \eta = (d_{21} : d_{11})c + d_{23}.$$

Allen Punkten dieser Geraden entspricht also derselbe Punkt $\xi\eta$. Sind $\xi\eta$ irgend zwei solche Zahlen, daß die Gleichungen

$$x d_{11} + y d_{12} + d_{13} - \xi = 0, \quad x d_{21} + y d_{22} + d_{23} - \eta = 0$$

nicht bloß durch einen Faktor verschieden sind, so kann man sagen, daß diese Gleichung für den unendlich fernen Punkt beider Geraden erfüllt sei, und daß dieser jedem Punkte $\xi\eta$ entspreche. — Die Eineindeutigkeit der Beziehung besteht bei der uneigentlichen Kollineation nicht.

§ 163. Durch Anwendung der Kollineation kann man den Satz von Gauß (§ 28) dahin erweitern: Schneidet man die Nebenseiten eines Vierseits durch eine Gerade, und bestimmt auf den Nebenseiten die Punkte, die durch die Ecken des Vierseits von den Schnittpunkten harmonisch getrennt sind, so liegen auch diese drei Punkte auf einer Geraden.

Das Prinzip der Dualität liefert hierzu den Satz: Projiziert man die Nebenecken eines Vierecks von einem Punkte, und bestimmt zu den drei Projektionsstrahlen die drei Geraden, die durch je zwei Seiten von diesen harmonisch getrennt sind, so schneiden sich auch diese Geraden in einem Punkte.

Noch einige Sätze und Aufgaben.

§ 164. Die harmonische Kovariante zweier Kegelschnitte. Durch die Kollineation lassen sich die Rechnungen, zu denen Aufgaben über Kegelschnitte führen, deren Charakter durch die Kollineation nicht geändert wird, die der Kollineation gegenüber invariant, oder, wie man sagt wenn die Aufgaben auf geometrische Örter führen, kovariant sind, oft dadurch erleichtern, daß man sie an speziellen Kegelschnitten ausführt, wie sogleich durch das folgende Beispiel erläutert wird. Wir suchen den Geradenbüschel, der alle Geraden enthält, die zwei gegebene Kegelschnitte in vier harmonischen Punkten treffen, jeden einzelnen in zugeordneten Punkten.

Besitzen die Kegelschnitte ein gemeinsames reelles Polardreieck, so kann man durch Kollineation eine Seite desselben zur unendlich fernen Geraden, die beiden anderen zu Achsen

eines rechtwinkligen Koordinatensystems machen. Die Bilder sind dann koaxial und besitzen Gleichungen von der Form

$$\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 - h = 0, \quad \sigma_1' x^2 + \sigma_2' y^2 - h' = 0.$$

Soll nun die Gerade $ux + vy + 1 = 0$ diese Kegelschnitte in vier harmonischen Punkten treffen, so müssen die Abszissen der Schnittpunkte harmonisch sein. Für diese Abszissen erhalten wir durch Elimination von $y = -(ux + 1) : v$ die beiden Gleichungen

$$x^2(\sigma_1 v^2 + \sigma_2 u^2) - 2\sigma_2 ux + \sigma_2 - hv^2 = 0,$$
$$x^2(\sigma_1' v^2 + \sigma_2' u^2) - 2\sigma_2' ux + \sigma_2' - h'v^2 = 0.$$

Die Bedingung dafür, daß die durch sie auf der x-Achse bestimmten Punkte harmonische sind, ist nach § 21

$$(\sigma_1 v^2 + \sigma_2 u^2)(\sigma_2' - h'v^2) + (\sigma_1' v^2 + \sigma_2' u^2)(\sigma_2 - hv^2) - 2\sigma_2\sigma_2' u^2 = 0.$$

Führt man die Multiplikationen aus, so hebt sich das mit u^2 multiplizierte Glied fort und es folgt

$$v^2(\sigma_1\sigma_2' + \sigma_1'\sigma_2 - u^2(h'\sigma_2 + h\sigma_2') - v^2(h'\sigma_1 + h\sigma_1')) = 0.$$

Der Faktor $v^2 = 0$ ist der Aufgabe fremd, v kam bei der Elimination von y im Nenner vor. Folglich liegen die gesuchten Geraden in einem Büschel zweiter Ordnung, er stützt sich auf einen Kegelschnitt, der die harmonische Kovariante der beiden ersten heißt. Da die Tangenten in den Schnittpunkten zu unseren Geraden gehören, so folgt noch der Satz:

Die acht Tangenten in den Schnittpunkten zweier Kegelschnitte liegen in einem Büschel zweiter Ordnung, berühren denselben Kegelschnitt.

Die harmonische Eigenschaft wird durch Kollineation nicht zerstört, und Kegelschnitte bilden sich auf Kegelschnitte ab. Der Satz gilt demnach auch für die ursprünglichen Kegelschnitte.

Es wurde zwar vorausgesetzt, daß das gemeinsame Polardreieck reell sei, die Rechnungen sind indessen analytisch durchgeführt und es hindert nichts, imaginäre Koordinaten einzuführen,

z. B. die Gleichung des Kreises in der Form anzusetzen

$$zz' = k^2, \quad z = x + yi, \quad z' = x - yi.$$

Der Satz gilt deshalb auch für den Fall (Poncelets Prinzip der Kontinuität), daß das gemeinsame Polardreieck zwei imaginäre Ecken hat.

Der Fall, in dem sich die Kegelschnitte berühren, läßt sich als Grenzfall auffassen.

§ 165. Krumme projektive Punktreihen. Die Punkte $\lambda\mu$ eines Kreises

$$x_\lambda = k\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}, \quad y_\lambda = \frac{2k\lambda}{1+\lambda^2}; \quad x_\mu = k\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}; \quad y_\mu = \frac{2k\mu}{1+\mu^2}$$

heißen einander kollinear oder projektiv zugeordnet, wenn

$$a + b\lambda + c\mu + d\lambda\mu = 0$$

ist. Es sollen $\lambda_1\mu_1$, $\lambda_2\mu_2$, $\cdots$ Paare dieser Projektivität sein. Durch einfache Rechnung ergibt sich

$$\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} - \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} = \frac{2(\lambda^2-\mu^2)}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)} = \frac{2(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)},$$

$$\frac{\lambda}{1+\lambda^2} - \frac{\mu}{1+\mu^2} = \frac{(\lambda-\mu)(1-\mu\lambda)}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)},$$

$$(1-\mu^2)\lambda - (1-\lambda^2)\mu = (\lambda-\mu)(1+\mu\lambda).$$

Daraus folgt, daß die Gleichungen

$$G_{12} = x(1-\lambda_1\mu_2) + y(\lambda_1+\mu_2) - k(1+\lambda_1\mu_2) = 0,$$

$$G_{21} = x(1-\lambda_2\mu_1) + y(\lambda_2+\mu_1) - k(1+\lambda_2\mu_1) = 0$$

zwei gerade Linien bedeuten, von denen die erste durch die Punkte $\lambda_1\mu_2$, die zweite durch $\mu_1\lambda_2$ geht.

Ersetzt man mit Hilfe der Beziehung

$$\mu = -(a+b\lambda):(c+d\lambda)$$

μ_1, μ_2 durch λ_1 und λ_2, so folgt hieraus

$$(c+d\lambda_2)G_{12} = x(c+d\lambda_2+a\lambda_1+b\lambda_1\lambda_2)$$
$$+ y(d\lambda_1\lambda_2 + c\lambda_1 - b\lambda_2 - a) - k(c+d\lambda_2-\lambda_1 a - b\lambda_1\lambda_2),$$

$$(c + d\lambda_1) G_{21} = x(c + d\lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_1\lambda_2)$$
$$+ y(d\lambda_1\lambda_2 + c\lambda_2 - b\lambda_1 - a) - k(c + d\lambda_1 - \lambda_2 a - b\lambda_1\lambda_2).$$

Bildet man daraus den Ausdruck

$$((c + d\lambda_2) G_{12} - (c + d\lambda_1) G_{21}) : (\lambda_2 - \lambda_1)$$
$$= G = x(d - a) - y(c + b) - k(d + a) = 0,$$

so erkennt man, daß sich die Geraden G_{12} und G_{21} auf einer Geraden G schneiden, die von $\lambda_1\mu_2$ $\lambda_2\mu_1$ unabhängig ist.

Also die untereinander stehenden Projektionsstrahlen

$$\lambda_1\mu_2,\ \lambda_1\mu_3,\ \lambda_1\mu_4,\ \cdots,$$
$$\mu_1\lambda_2,\ \mu_1\lambda_3,\ \mu_1\lambda_4,\ \cdots$$

schneiden sich in Punkten einer Geraden. Oder:

Liegen auf einem Kreise zwei einander kollineare oder projektive Punktreihen, und projiziert man von einem Punkt der ersten Reihe die Punkte der zweiten, und vom entsprechenden Punkte der zweiten Reihe entsprechend die Punkte der ersten Reihe, so schneiden sich die entsprechenden Strahlen auf einer Geraden, die die Perspektivitätsachse der projektiven Reihen heißt, und die unabhängig von der Wahl des Paares entsprechender Punkte ist, von denen die Reihen projiziert werden.

Durch drei Paare entsprechender Punkte ist die Perspektivitätsachse bestimmt und kann nun dazu dienen, zu jedem weiteren Punkte den entsprechenden zu konstruieren. Ihre Schnittpunkte mit dem Kreise liefern die Doppelpunkte der Projektivität, die imaginär sein und auch in einen zusammenfallen können.

§ 166. Involutionszentrum. Die Gleichung einer Geraden G_λ durch ein entsprechendes Paar λ, μ der Projektivität

$$a + b\lambda + c\mu + d\lambda\mu = 0$$

ist

$$G_\lambda = dx(1 - \lambda\mu) + dy(\lambda + \mu) - dk(1 + \lambda\mu) = 0,$$

und wenn man $d\lambda\mu$ durch $-a - b\lambda - c\mu$ ersetzt

$$G_\lambda = x(d + a + b\lambda + c\mu) + dy(\lambda + \mu) - k(d - a - b\lambda - c\mu) = 0$$

Drückt man μ durch λ aus, so ergibt sich

$$(c + d\lambda) G_\lambda : d = 0 = x(c + (a + d)\lambda + b\lambda^2)$$
$$+ y(-a + (c - b)\lambda + d\lambda^2) + k(c + (d - a)\lambda - b\lambda^2)$$

und es bilden die Geraden G_λ einen Strahlenbüschel, dessen Linienkoordinaten u, v quadratische Funktionen des Parameters λ mit gleichen Nennern sind. Diese Strahlen bilden daher (vergl. § 45) einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung, der sich auf einen Kegelschnitt stützt. Dieser hat mit dem Kreis nur zwei Tangenten gemein, nämlich die Tangenten in den Punkten, die die Perspektivitätsachse auf dem Kreise bestimmt. Der Kegelschnitt muß deshalb den Kreis zweimal berühren.

Ist die Projektivität involutorisch, $b = c$, so wird aus G_λ, wenn $\lambda + \mu = \nu$ gesetzt wird,

$$G_\lambda = x(a + d + b\nu) + dy\nu - k(d - a - b\nu) = 0.$$

Die Strahlen G_λ bilden einen linearen Strahlenbüschel, gehen durch einen Punkt, den man das Involutionszentrum nennt. Seine Koordinaten sind

$$x = k\frac{d - a}{a + d}, \quad y = \frac{-2kb}{d + a},$$

er ist der Pol der Perspektivitätsachse, die hier auch Involutionsachse genannt wird.

Umgekehrt bestimmen die Strahlen eines linearen Büschels durch einen Punkt g auf einem Kreise eine Involution, deren Doppelpunkte die Schnittpunkte der Polare G von g mit dem Kreise sind. Die Involution ist elliptisch, wenn g im Innern des Kreises liegt.

§ 167. Problem des Ottajano. Legt man durch einen Punkt g' Strahlen, die den Kreis in den Punkten $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \cdots$ und zum zweiten Male in $\lambda', \lambda_1', \lambda_2', \cdots$ treffen, so ist

$$\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \cdots \barwedge \lambda', \lambda_1', \lambda_2', \cdots$$

($\barwedge$ = projektiv). Legt man durch einen Punkt g'' und durch die Punkte $\lambda', \lambda_1', \lambda_2', \cdots$ Strahlen, die den Kreis zum zweiten Male in $\lambda'', \lambda_1'', \lambda_2'', \cdots$ treffen, so ist

$$\lambda'', \lambda_1'', \lambda_2'', \cdots \barwedge \lambda, \lambda_1, \lambda_2, \cdots.$$

Legt man durch einen Punkt g''' und durch $\lambda'', \lambda_1'', \lambda_2'', \cdots$ Strahlen, die den Kreis in den Punkten $\lambda''', \lambda_1''', \lambda_2''', \cdots$ treffen, so ist

$$\lambda''', \lambda_1''', \lambda_2''', \cdots \barwedge \lambda, \lambda_1, \lambda_2, \cdots.$$

Fährt man, wenn n Punkte $g'g'' \cdots g^{(n)}$ gegeben sind, so fort, immer den folgenden Punkt mit den zweiten Schnittpunkten der vorhergehenden Strahlenschnitte zu verbinden, so sind die letzten Schnittpunkte $\lambda^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \cdots$ den Punkten $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \cdots$ projektiv zugeordnet. Das Ottajanosche Problem besteht dann darin, λ so zu wählen, daß es mit $\lambda^{(n)}$ zusammenfällt. Man konstruiere zu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots; \lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \lambda_3^{(n)}, \cdots$ die Perspektivitätsachse, wozu das Ziehen von nur drei geraden Linien durch g' und die zugehörigen durch $g''g''' \cdots$ nötig ist. Läßt man dann λ auf den Schnittpunkt der Perspektivitätsachse mit dem Kreise fallen, so fällt $\lambda^{(n)}$ auf λ, womit das Problem gelöst ist. Man erhält deshalb bei gegebener Anordnung der $g'', g''', \cdots$ zwei Lösungen, die imaginär sein können. Ordnet man die Reihenfolge $g'', g''', \cdots$ um, so erhält man mehr Lösungen.

§ 168. Projektive Punktreihen des Kreises werden von zwei Punkten desselben, die auch zusammenfallen können, durch projektive Strahlenbüschel projiziert. Die Geraden durch die Punktpaare $\lambda_0\lambda$, $\mu_0\mu$ haben die Gleichungen

$$x(1-\lambda\lambda_0) + y(\lambda+\lambda_0) - k(1+\lambda\lambda_0) = 0,$$
$$x(1-\mu\mu_0) + y(\mu+\mu_0) - k(1+\mu\mu_0) = 0.$$

Besteht nun zwischen $\lambda\mu$ eine bilineare Gleichung, so sind die beiden Büschel projektiv.

Umgekehrt werden durch zwei projektive Strahlenbüschel, die ihre Träger auf dem Kreise haben, auf dem Kreise projektive Punktreihen bestimmt.

§ 169. Allgemeinere projektive krumme Punktreihen. Da durch Kollineation der Kreis auf jeden Kegel-

schnitt abgebildet werden kann, und projektive Eigenschaften invariant sind, so gelten die über projektive Punktreihen auf einem Kreise ausgesprochenen Sätze für jeden Kegelschnitt. Durch das Prinzip der Dualität überträgt man dieselben auf Strahlenbüschel zweiter Ordnung. Das Problem des Ottajano lautet dann, einem Kegelschnitte ein Polygon so zu umschreiben, daß die Ecken auf n gegebenen Geraden liegen.

§ 170. Die Direktrix. Die Polare eines Brennpunktes nennt man Direktrix oder Leitlinie der Kurve zweiter Ordnung. Ein Brennpunkt des Kegelschnittes $\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 - 1 = 0$ hat die Koordinaten $x = \sqrt{\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}}$, $y = 0$ und seine Polare hat die Gleichung $\sigma_1 x \sqrt{\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}} = 1$. Wir begnügen uns mit dem Falle $0 < \sigma_1 < \sigma_2$. Die Entfernung eines Punktes der Kurve von diesem Brennpunkt ist

$$f = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} - x\sqrt{\sigma_1}\sqrt{\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}}.$$

Die Entfernung von der zugehörigen Direktrix ist

$$h = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}}} - x = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}\sqrt{\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}}}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} - x\sqrt{\sigma_1}\sqrt{\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}}\right).$$

Demnach ist $f : h = \sqrt{\sigma_1}\sqrt{\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}}$, das Verhältnis der beiden Entfernungen ist demnach konstant.

§ 171. Aufgabe. Die durch den Punkt $x_0 y_0$ gehenden Normalen des Kegelschnittes $\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 = 1$ zu bestimmen. Da $\sigma_1 x\xi + \sigma_2 y\eta - 1 = 0$ die Gleichung der Tangente in Kurvenpunkte $\xi\eta$ ist, so ist die Gleichung der Normale in diesem Punkte

$$(x - \xi)\eta\sigma_2 - (y - \eta)\sigma_1\xi = x\eta\sigma_2 - y\xi\sigma_1 + (\sigma_1 - \sigma_2)\xi\eta = 0,$$

sie soll durch die Koordinaten $x = x_0$, $y = y_0$ erfüllt sein. Wir setzen

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{\sigma_2}} \frac{2t}{1+t^2},$$

was für jeden Punkt $\xi\eta$ der Kurve zulässig ist. So erhalten wir die Gleichung

$$2x_0\sigma_2\sqrt{\sigma_1}\,t(1+t^2) - y_0\sigma_1\sqrt{\sigma_2}\,(1-t^4) + 2(\sigma_1-\sigma_2)\,t(1-t^2) = 0.$$

Es gibt demnach durch jeden Punkt vier Normalen, die man nach der Methode des § 113 finden kann.

§ 172. Die Tangenten einer Hyperbel bestimmen mit den Asymptoten Dreiecke von konstantem Inhalt. Bezieht man die Gleichung der Hyperbel auf ihre Asymptoten, so ist dieselbe $xy = k^2$. Die Gleichung der Tangente im Punkte $\xi\eta$ ist

$$x\eta + y\xi - \tfrac{1}{2}k^2 = 0.$$

Ihre Schnittpunkte mit den Asymptoten sind

$$x = \tfrac{1}{2}k^2 : \eta, \quad y = \tfrac{1}{2}k^2 : \xi$$

und das Produkt dieser beiden Größen, das mit dem halben sinus des Asymptotenwinkels multipliziert den Inhalt der besagten Dreiecke ergibt, ist

$$xy = \tfrac{1}{4}k^4 : \xi\eta = \tfrac{1}{4}k^2.$$

§ 173. Satz von Hesse. Sind die Punkte g_1, g_1'; g_2, g_2' zwei Paare konjugierter Punkte für irgend eine Kurve zweiter Ordnung, so bestimmen sie noch ein weiteres Paar ebensolcher Punkte, und zwar durch zwei Nebenecken des Vierecks $g_1g_1'\,g_2g_2'$.

Da der Satz nur von projektiven Eigenschaften handelt, so kann man, um die Rechnung zu erleichtern, durch Kollineation die beiden Punkte g_1g_2 auf die x-Achse, die beiden Punkte $g_1'g_2'$ auf die y-Achse abbilden, und den Satz für diesen Fall erweisen. Die Koordinaten unserer Punkte sind dann

$$\begin{matrix} g_1; & g_1'; & g_2; & g_2', \\ \xi_1, 0; & 0, \eta_1'; & \xi_2, 0; & 0, \eta_2', \end{matrix}$$

so daß die Nebenecke $(g_1g_2)(g_1'g_2')$ auf den Koordinatenanfang $(x_1 = 0,\ y_1 = 0)$ fällt.

Die Kurve habe die Gleichung

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Die Bedingung für das Konjugiertsein der Punkte $g_1 g_1'$ bez. $g_2 g_2'$ liefert nach § 129 die Gleichungen

$$a_{12}\xi_1\eta_1' + a_{13}\xi_1 + a_{23}\eta_1' + a_{33} = 0,$$
$$a_{12}\xi_2\eta_2' + a_{13}\xi_2 + a_{23}\eta_2' + a_{33} = 0,$$

aus denen durch Elimination von a_{12} folgt

$$a_{13}\xi_1\xi_2(\eta_2' - \eta_1') + a_{23}\eta_1'\eta_2'(\xi_2 - \xi_1) + a_{33}(\xi_2\eta_2' - \xi_1\eta_1') = 0.$$

Der Schnittpunkt der Geraden

$$g_1g_2',\ x\eta_2' + y\xi_1 - \xi_1\eta_2' = 0;\quad g_2g_1',\ x\eta_1' + y\xi_2 - \xi_2\eta_1' = 0$$

hat die Koordinaten

$$x_2 = \xi_1\xi_2(\eta_2' - \eta_1') : \xi_2\eta_2' - \xi_1\eta_1',$$
$$y_2 = \eta_1'\eta_2'(\xi_2 - \xi_1) : \xi_2\eta_2' - \xi_1\eta_1'.$$

Setzt man die gefundenen Werte in den Ausdruck $F(x_1; x_2)$ ein, so findet man

$$a_{13}\xi_1\xi_2(\eta_2' - \eta_1') + a_{23}\eta_1'\eta_2'(\xi_2 - \xi_1) + a_{33}(\xi_2\eta_2' - \xi_1\eta_1'),$$

was nach dem Obigen Null ist. Die Schnittpunkte der Geraden $(g_1g_2)(g_1'g_2')$ und $(g_1g_1')(g_2g_2')$ sind demnach konjugierte Punkte, was zu beweisen war.

§ 174. Sind die Seiten G_1, G_2, G_3 eines Dreiecks die Polaren der Ecken $g_1g_2g_3$ eines anderen, so liegen die beiden Dreiecke perspektiv. Es genügt auf Grund des Prinzips der Kollineation diesen Satz für den Kreis $x^2 + y^2 = 1$ zu erweisen. — Dann sind die Geraden

$$(x\xi_2 + y\eta_2 - 1)(\xi_1\xi_3 + \eta_1\eta_3 - 1)$$
$$- (x\xi_3 + y\eta_3 - 1)(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 - 1) = 0,$$
$$(x\xi_3 + y\eta_3 - 1)(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 - 1)$$
$$- (x\xi_1 + y\eta_1 - 1)(\xi_2\xi_3 + \eta_2\eta_3 - 1) = 0,$$
$$(x\xi_1 + y\eta_1 - 1)(\xi_2\xi_3 + \eta_2\eta_3 - 1)$$
$$- (x\xi_2 + y\eta_2 - 1)(\xi_1\xi_3 + \eta_1\eta_3 - 1) = 0$$

die Verbindungslinien der Eckenpaare der beiden Dreiecke. Sie gehen durch **einen** Punkt, denn ihre Summe ist identisch Null. Die Dreiecke liegen perspektiv.

§ 175. Ein Satz von Poncelet. Eine Sekante durch die Punkte $t_0 t$ des Kreises $(R) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$ hat nach § 165 in der Normalform die Gleichung

$$\frac{x(1 - tt_0) + y(t + t_0) - R(1 + tt_0)}{\sqrt{(1 + t^2)(1 + t_0^2)}} = 0.$$

Soll sie Tangente an den Kreis $(r) = (x - a)^2 + y^2 - r^2 = 0$ sein, so muß man durch Einsetzen von $x = a$, $y = 0$ in die linke Seite dieser Gleichung den Wert r erhalten, es muß also

$$a(1 - tt_0) - R(1 + tt_0) = r\sqrt{(1 + t^2)(1 + t_0^2)}$$

sein. Durch Rationalisierung folgt daraus die Gleichung

$$t^2 t_0^2((a + R)^2 - r^2) - r^2(t^2 + t_0^2) + 2tt_0(R^2 - a^2) \\ + (a - R)^2 - r^2 = 0,$$

oder

$$t^2[t_0^2((a + R)^2 - r^2) - r^2] + 2tt_0(R^2 - a^2) + (a - R)^2 - r^2 \\ - r^2 t_0^2 = 0.$$

Sind tt' die Wurzeln dieser Gleichung, so ist

$$t + t' = \frac{2t_0(a^2 - R)^2}{t_0^2((a + R)^2 - r^2) - r^2}, \quad tt' = \frac{(a - R)^2 - r^2 - r^2 t_0}{t_0^2((a - R)^2 - r^2) - r^2},$$

und die Verbindungslinie dieser beiden Punkte hat (nach Fortschaffung des Nenners) die Gleichung

$$x(t_0^2(a + R)^2 - (a - R)^2) + 2yt_0(a^2 - R^2) \\ - R(t_0^2((a + R)^2 - 2r^2) + (a - R)^2 - 2r^2) = 0.$$

Läßt man t_0 laufen, so bilden diese Geraden einen Büschel, dessen Linienkoordinaten

$$u = \frac{(a - R)^2 - (a + R)^2 t_0^2}{R((a - R)^2 - 2r^2 + ((a + R)^2 - 2r^2)t_0^2)},$$

$$v = \frac{2t_0(R^2 - a^2)}{R((a - R)^2 - 2r^2 + ((a + R)^2 - 2r^2)t_0^2)}$$

sind, dessen Stützkurve ein Kegelschnitt ist. Um die Natur

dieses Kegelschnittes näher kennen zu lernen, machen wir folgende Betrachtung. Sind $G_1 = 0$, $G_2 = 0$, $G_3 = 0$ drei gerade Linien, und bilden wir aus ihnen den Büschel zweiter Ordnung $t^2 G_1 + 2t G_2 + G_3 = 0$, so gehen, den beiden Wurzeln für t entsprechend, durch jeden Punkt zwei Strahlen des Büschels, durch jeden Stützpunkt aber geht nur einer, für ihn müssen die beiden Wurzeln der Büschelgleichung in eine zusammenfallen, es muß $G_2{}^2 - G_1 G_3 = 0$ sein. Dies ist die Gleichung der Stützkurve. In unserem Falle ist

$$G_1 = (a + R)^2 x - R((a + R)^2 - 2r^2), \quad G_2 = y(a^2 - R^2),$$
$$G_3 = -x(a - R)^2 - R((a - R)^2 - 2r^2).$$

Daraus resultiert als Gleichung der Stützkurve

$$G_2 G_2 - G_1 G_3 = (a^2 - R^2)(x^2 + y^2) - 2x\,4ar^2R^2$$
$$- R^2((a^2 - R^2)^2 - 4r^2(a^2 + R^2)) + 4r^4 = 0.$$

Dieser Ausdruck läßt sich in die Form bringen

$$((a^2 - R^2)^2 - 4r^2R^2) \cdot (R) + 4r^2R^2 \cdot (r) = 0.$$

Die Stützkurve ist deshalb ein Kreis des durch (R) und (r) bestimmten linearen Kreisbüschels.

Soll dieser Kreis mit dem Kreis (r) zusammenfallen, so muß, wenn $a < R$ angenommen wird,

$$4r^2R^2 = (a^2 - R^2)^2, \quad 2rR = R^2 - a^2$$

oder

$$\frac{r}{R + a} + \frac{r}{R - a} = 1$$

sein. Daraus folgt der Schließungssatz: Zieht man von einem Punkt t_1 eines Kreises (R) eine Tangente an einen Kreis (r), vom Schnittpunkte t_2 dieser Tangente eine zweite Tangente an (r), die (R) in t_3 trifft, von t_3 wieder eine Tangente an (r), und trifft nun die von t_3 gezogene Tangente den Kreis (R) in t_1, so daß ein geschlossenes Dreieck entsteht, so fügen sich die drei Tangenten stets zu einem geschlossenen Dreieck, dessen Ecken auf (R) liegen, zusammen, wie man auch t_1 wählen möge.

Durch Kollineation läßt sich dieser Satz auf beliebige Kegelschnitte übertragen.

Daß dieser Schließungssatz auch für das Viereck besteht, dessen Ecken auf (R) liegen, dessen Seiten (r) berühren, erkennt man sofort mit Hilfe einer Diagonale desselben, die einen Kreis des Büschels $(R)(r)$ berührt.

§ 176. Sind die Doppelstellen einer Projektivität, wir wählen eine solche auf einer geraden Punktreihe, gegeben, so gibt es noch einfach unendlich viele Projektivitäten mit denselben Doppelpunkten. Sie lassen sich eindeutig reellen Zahlen zuordnen, mittels des Doppelverhältnisses zwischen einem Paare der Projektivität und den Doppelpunkten.

Ist die Projektivität durch die bilineare Gleichung

$$a + b\xi + cx + dx\xi = 0$$

gegeben, so sind (§ 18) die Doppelstellen

$$p = \frac{-b-c+r}{2d}, \quad q = \frac{-b-c-r}{2d}, \quad r = \sqrt{(b+c)^2 - 4ad}.$$

Alsdann ist (vergl. § 19)

$$\lambda = (xp\,\xi q) = \frac{-pq + \xi p + xq - x\xi}{-pq + \xi q + xp - x\xi}$$

$$= \frac{-a + \dfrac{-b-c+r}{2}\xi + \dfrac{-b-c-r}{2}x - dx\xi}{-a + \dfrac{-b-c-r}{2}\xi + \dfrac{-b-c+r}{2}x - dx\xi}.$$

Addiert man nun im Zähler und Nenner die Identität

$$a + b\xi + cx + dx\xi = 0,$$

so folgt

$$\lambda = \frac{(b-c+r)\xi + (c-b-r)x}{(b-c-r)\xi + (c-b+r)x} = \frac{b-c+r}{b-c-r},$$

unabhängig von der Wahl des Paares $x\xi$. Wollte man die Projektivität durch die Zahl λ charakterisieren, so würde man für imaginäre pq imaginäre Zahlen erhalten, und durch Vertauschung der Doppelpunkte verschiedene Zahlen. Deshalb ziehen wir vor, als charakteristische Zahl für eine Projektivität mit gegebenen Doppelpunkten die Zahl $k = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)$ zu nehmen. Dann ist

$$k = \tfrac{1}{2}\left(\frac{b-c+r}{b-c-r} + \frac{b-c-r}{b-c+r}\right) = \frac{(b-c)^2 + r^2}{(b-c)^2 - r^2} = \tfrac{1}{2}\,\frac{b^2 + c^2 - 2ad}{ad - bc}.$$

Ist r reell, sind also pq reell, so ist $k > 1$ oder $k < -1$. Im Grenzfalle $k = 1$ erhält man die Identität. Im Grenzfalle $k = -1$ die Involution.

Sind die Doppelpunkte (konjugiert) imaginär, ist also r rein imaginär, so ist λ eine komplexe Zahl mit dem absoluten Betrage Eins, λ und $1 : \lambda$ sind konjugiert imaginär. Deshalb liegt k zwischen -1 und $+1$. Die Grenzfälle stimmen mit den vorigen überein. Die Zahl k ändert sich nicht, wenn auf $x\xi$ gleichzeitig (kogredient) dieselbe Kollineation angewendet wird.

§ 177. Ebenso lassen sich perspektiven Kollineationen, deren Doppelpunkt und Kollineationsachse gegeben sind, reelle Zahlen k, die für sie charakteristisch sind, eindeutig zuordnen.

Wird die Ebene zugleich als $\xi\eta$-Feld und als xy-Feld gedacht, und besteht zwischen $\xi\eta$; xy eine perspektive Kollineation, so kann man das Perspektivitätszentrum zum Koordinatenanfang, die Kollineationsachse zur uneigentlichen Geraden machen durch eine kogrediente Kollineation beider Felder. Die perspektive Kollineation verwandelt sich dadurch in die der Ähnlichkeit mit dem Koordinatenanfang als Ähnlichkeitspunkt. Die Kollineationsgleichungen sind dann

$$\xi = hx, \quad \eta = hy.$$

Auf jeder Geraden durch den Koordinatenanfang ist das Doppelverhältnis eines Paares entsprechender Punkte mit den sich selbst entsprechenden, also z. B. auf der x-Achse zwischen $(\xi 0\, x \infty)$ gleich h und die charakteristische Zahl k des vorigen Paragraphen ist $\frac{1}{2}\left(h + \frac{1}{h}\right)$. — Geht man zu dem ursprünglichen Kollineationsfelde zurück, so hat man den Satz:

Legt man durch den Doppelpunkt einer perspektiven Kollineation eine Gerade, so ist die charakteristische Zahl der auf ihr liegenden Projektivität unabhängig von der Wahl der Geraden, die Zahl kann also als charakteristische Zahl der perspektiven Kollineation angesehen werden.

§ 178. Soll eine Kollineation im ebenen Felde involutorisch sein, so muß sie eine perspektive Kollineation sein. Denn die Verbindungslinie eines (involutorischen) Paares muß sich selbst entsprechen. Es gibt unendlich viele sich selbst entsprechende Gerade, was nur bei perspektiven Kollineationen vorkommt. Durch kogrediente Kollineation können wir die Kollineationsachse zur uneigentlichen Geraden machen. Gibt es kein Kollineationszentrum, so entsteht dadurch die Verwandtschaft der Kongruenz

$$\xi = x + h, \quad \eta = y + h,$$

die nicht involutorisch ist. Gibt es ein Perspektivitätszentrum, so machen wir es noch zum Koordinatenanfang, und es entsteht die Verwandtschaft der Ähnlichkeit in ähnlicher Lage, mit dem Koordinatenanfang als Ähnlichkeitspunkt.

$$\xi = xk, \quad \eta = yk.$$

Diese Verwandtschaft ist nur dann involutorisch, wenn $k = -1$ ist. — Eine Kollineation ist also dann und nur dann involutorisch, wenn sie eine perspektive Kollineation ist, und wenn die charakteristische Zahl dieser perspektiven Kollineation -1 ist.

In meiner Abhandlung (im XXI. Bande der Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften) über zweizweideutige Verwandtschaften, habe ich eine solche Abbildung eine in bezug auf einen Punkt und eine Gerade symmetrische Abbildung genannt.

§ 179. Konstruktion der zu einer Projektivität gehörenden Involution. Die Involution, die die Doppelelemente einer Projektivität als Doppelelemente enthält, wollen wir die zugehörige nennen. Die Aufgaben zweiten Grades lassen sich mit Zirkel und Lineal lösen. Sie lassen sich darauf zurückführen, die Doppelelemente einer Involution, die durch zwei Paare gegeben ist, zu konstruieren, eine Aufgabe, die im § 166 gelöst ist. Die Involution selbst aber muß linear gefunden werden. Begnügt man sich, die Involution zu bestimmen, deren

Doppelelemente die Aufgabe lösen, wie man es im Falle imaginärer Lösungen tun muß, so ist die Lösung linear. Eine solche Aufgabe ist die, die Doppelelemente einer Projektivität zu bestimmen, also die Aufgabe, die zu einer Projektivität gehörige Involution zu konstruieren. Es genügt, eine Projektivität in einer Geraden zu behandeln.

Sind pq die (gesuchten) Doppelstellen der Projektivität

$$a + b\xi + cx + dx\xi = 0,$$

so ist

$$a + (b + c)p + dp^2 = 0, \quad a + bp = -p(c + dp),$$
$$a + bq = -q(c + dq).$$

Daraus folgt

$$\xi = -\frac{a + cx}{b + dx}, \quad \xi - p = -\left(p + \frac{a + cx}{b + dx}\right) = -\frac{a + bp + (c + pd)x}{b + dx},$$

$$\xi - p = -\frac{(c + pd)(x - p)}{b + dx}, \quad \xi - q = -\frac{(c + qd)(x - q)}{b + dx},$$

$$\frac{\xi - p}{\xi - q} = k\frac{x - p}{x - q}, \quad k = \frac{c + pd}{c + qd}.$$

Setzen wir $\xi - p : \xi - q = \Xi$, $x - p : x - q = X$, so folgt $\Xi = kX$. Daß $\Xi X k$ komplexe Zahlen sind, wenn die Doppelstellen pq (konjugiert) imaginär sind, ist für unsere Untersuchung ohne Belang. Die Kollineation $\Xi = kX$, deren Doppelstellen Null und Unendlich sind, ergibt durch entsprechende Paare $X\Xi$ entsprechende Paare $x\xi$ und umgekehrt. Für ein bestimmtes X sei $\Xi = kX = X'$, so daß also X' die Zahl der Ξ-Reihe ist, die X entspricht. Betrachtet man dieselbe Zahl X als Zahl der Ξ-Reihe, und nennt die entsprechende Zahl der X-Reihe T, so ist $T = X : k$. Nun bestimmen wir die Zahl Ξ so, daß $(\Xi X' X T)$ ein harmonischer Wurf, ein harmonisches Quadrupel ist. Dann bilden auch die zugehörigen Punkte $\xi x' x t$ einen harmonischen Wurf. Es ist also nach § 21

$$(T + X')(X + \Xi) = 2TX' + 2X\Xi,$$

und wenn man T durch $X : k$, X' durch Xk ersetzt und den Faktor X unterdrückt

$$\left(k + \frac{1}{k}\right)(X + \Xi) = 2(X + \Xi),$$

woraus folgt $X + \Xi = 0$, $\Xi = -X$,

$$\frac{x-p}{x-q} + \frac{\xi - p}{\xi - q} = 0, \quad pq - \tfrac{1}{2}(p+q)(x+\xi) + x\xi = 0,$$

und wenn man die letzte Gleichung mit d multipliziert,

$$a + \tfrac{1}{2}(b+c)(x+\xi) + dx\xi = 0.$$

Das ist die Involution, die mit der gegebenen Projektivität die Doppelpunkte gemein hat.

Um nun die Involution linear zu konstruieren, suche man zu einem Punkt x der x-Reihe den Punkt x' der ξ-Reihe, dann zum Punkt x als Punkt der ξ-Reihe den Punkt t, der ihm in der x-Reihe entspricht. Weiter konstruiere man den Punkt ξ, der von x durch x' und t harmonisch getrennt ist, so hat man in $x\xi$ ein Paar der gesuchten Involution. Auf dieselbe Weise konstruiere man ein zweites Paar, um die Involution vollständig zu bestimmen.

§ 180. Konstruktion des rechtwinkligen Paares einer Strahleninvolution. Betrachtet man eine Strahleninvolution als Mittelpunktsinvolution eines Kegelschnittes und wählt zwei Punkte, die zum Mittelpunkte symmetrisch liegen, und zieht von diesen Punkten Parallele zu einem Paare der Involution, so schneiden sich diese in einem Punkte des Kegelschnittes, für den die Involutionsstrahlen die konjugierten Durchmesser sind.

Es wurde im § 140 die Konstruktion der Achsen des Kegelschnittes gegeben, und damit die des rechtwinkligen Paares. Diese Lösung erfordert das Aufsuchen der Schnittpunkte eines Kreises mit einem Kegelschnitte, während sie als Aufgabe zweiten Grades mit einem Kegelschnitte lösbar sein muß, die Konstruktion befriedigt daher nicht.

Man lege durch den Träger der Involution einen Kreis. Zwei Paare der gegebenen Involution bestimmen auf ihm eine krumme Involution, deren Involutionszentrum nach § 166 ge-

funden wird. Die Strahlen durch das Involutionszentrum bestimmen auf dem Kreise, und somit in der gegebenen Involution Paare. Der Strahl durch den Mittelpunkt des Kreises bestimmt zwei (diametrale) Punkte, und diese mit dem Träger der gegebenen Involution das rechtwinklige Paar, weil der Winkel im Halbkreise ein rechter ist.

§ 181. Quadratur der Parabel. Es sei $y = \sqrt{2p}\sqrt{x}$ und

$$o < a = x_0 < x_1 \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Bilden wir das Flächenstück, das von der Strecke $x_\mu x_{\mu+1}$, von den Ordinaten

$$y_\mu = \sqrt{2p}\sqrt{x_\mu}, \quad y_{\mu+1} = \sqrt{2p}\sqrt{x_{\mu+1}},$$

und dem zugehörigen Parabelstück begrenzt ist, so liegt der Inhalt T_μ desselben zwischen dem der beiden Rechtecke

$$(x_{\mu+1} - x_\mu) y_\mu \text{ und } (x_{\mu+1} - x_\mu) y_{\mu+1},$$

so daß

$$(x_{\mu+1} - x_\mu)\sqrt{2p}\sqrt{x_\mu} < T_\mu < (x_{\mu+1} - x_\mu)\sqrt{2p}\sqrt{x_{\mu+1}}$$

ist. Nun setzen wir, die Bekanntschaft mit der Summenformel für die geometrische Reihe voraussetzend,

$$\sqrt[n]{b : a} = \sigma^2, \quad x_\mu = a\sigma^{2\mu}, \quad x_{\mu+1} - x_\mu = a\sigma^{2\mu}(\sigma^2 - 1),$$
$$y_\mu = \sqrt{2ap}\,\sigma^\mu,$$

$$S = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} (x_{\mu+1} - x_\mu) y_\mu$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} a\sqrt{2ap}\,(\sigma^2 - 1)\,\sigma^{3\mu} = a\sqrt{2ap}\,(\sigma^2 - 1)\,\frac{\sigma^{3n} - 1}{\sigma^3 - 1}$$

$$= \frac{a\sqrt{2ap}\,(1+\sigma)}{1+\sigma+\sigma^2}\left(\sqrt{\frac{b^3}{a^3}} - 1\right) = \frac{\sqrt{2p}\,(1+\sigma)}{1+\sigma+\sigma^2}\left(\sqrt{b^3} - \sqrt{a^3}\right),$$

$$S' = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} a\sqrt{2ap}\,(\sigma^2 - 1)\,\sigma\sigma^{3\mu} = \sigma S.$$

Dann gilt für das Flächenstück T, das von der Abszissenachse

zwischen a und b, von den zu a und b gehörenden Ordinaten, und dem zugehörigen Parabelstücke begrenzt ist, für jedes noch so große n die Ungleichung

$$S < T < \sigma S.$$

Lassen wir nun n über alle Grenzen wachsen, so wird σ sich der Zahl Eins nähern und T wird dem Grenzwerte von S gleich. Folglich ist $T = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\,(b^3 - a^3)$. Diese Formel bleibt für jedes noch so kleine a richtig, und da sie für abnehmende positive a stetig ist, so können wir $a = 0$ setzen. Für b schreiben wir noch x und für $\sqrt{2px}$ setzen wir y. Dann ergibt sich

$$T = \tfrac{2}{3}xy.$$

Die Parabel zwischen ihrem Scheitel und dem Punkte xy teilt das Rechteck xy in zwei Teile, von denen der die x-Achse enthaltende Teil noch einmal so groß ist, als der die y-Achse enthaltende.

Konstruktionen.

Konstruktion der Achsen eines Kegelschnittes § 140, 180, des rechtwinkligen Paares einer Strahleninvolution § 180, entsprechender Punkte einer Projektivität § 18, der Brennpunkte § 141, des Potenzpunktes dreier Kreise § 55, eines Kreises durch drei Punkte, von denen zwei ideale sind § 63, des Kreises eines Büschels, wenn der Mittelpunkt gegeben ist, der Doppelpunkte einer Involution § 63, 166, einer Projektivität § 165, der Kreise eines Büschels, die einen gegebenen Radius haben § 63, des Kreises, der einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet, § 63, der einen gegebenen Kreis diametral schneidet § 63, der einen gegebenen Kreis berührt § 63.

Konstruktion des gemeinsamen Büschels zweier Kreisbündel § 64, des gemeinsamen Paares zweier Involutionen § 64, der gemeinsamen Tangenten zweier Kreise § 65, des Ortes gleicher scheinbarer Größe zweier Strecken auf einer Geraden § 73, 74.

Konstruktion der Parabel § 20, der Parabelachse § 88, eines Kegelschnittes aus fünf Punkten § 116, aus fünf Tangenten § 145.

Konstruktion der Tangente in einem Punkte eines Kegelschnittes § 117.

Konstruktion der zu einer Projektivität gehörenden Involution § 179.

